Math. Dept.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Received August, 1898

Accession No. 72184 . Class No.

MATH/STAT.

QA300
B13
Math.
dept.

53101601

QA300
B481
1895
MATH

École Polytechnique.
2e Division.
1ère Année.
1894-1895.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
72184

Cours d'Analyse.

Mr Bertrand Professeur.

1e Leçon.

Infiniment petits : – Notation différentielle.

Définitions : Fonction. – On appelle variable une grandeur pouvant prendre diverses valeurs, et fonction de cette variable une autre grandeur qui varie avec celle ci, et dont la valeur se trouve déterminée par celle de la variable.

On représente souvent la variable par x, la fonction par y et la relation qui les lie par l'équation

$$y = f(x)$$

La géométrie donne immédiatement une interprétation du mot fonction : prenons deux axes rectangulaires, représentons les valeurs de x par des abscisses, les valeurs correspondantes de y par des ordonnées, nous obtenons ainsi les points d'une certaine ligne qui représente la fonction.

Réciproquement, si l'on trace dans un plan deux axes rectangulaires et une courbe, elle définit

l'ordonnée comme fonction de l'abscisse, ou inversement.

La variable y étant fonction de x il ne s'ensuit pas nécessairement que la relation qui les lie puisse être représentée par les symboles algébriques, exponentiels, logarithmiques.... etc. Le mot fonction a un sens beaucoup plus général.

Il est d'ailleurs évident que si x est fonction de y, réciproquement y est tout aussi bien fonction de x, ces deux quantités jouent absolument le même rôle.

Infiniment petits. - On appelle infiniment petit une quantité essentiellement variable qui tend vers 0. Jamais une quantité fixe ne peut être infiniment petite.

La notion des infiniment petits permet de simplifier beaucoup de définitions. Ainsi au lieu de définir la dérivée d'une fonction comme la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable quand toutes deux tendent simultanément vers 0, on peut dire que la dérivée est la limite du rapport des accroissements infiniment petits simultanés de la fonction et de la variable.

Autre exemple: On définit généralement la tangente en un point d'une courbe comme la limite d'une sécante tournant autour de ce point jusqu'à ce qu'un second point se confonde avec le premier. Il serait plus simple de dire: La tangente en un point d'une courbe est une droite joignant ce point à un point infiniment voisin.

Les infiniment petits n'entrent jamais isolément dans un calcul, car il faudrait les remplacer à la limite par 0. Il faut donc en introduire plusieurs et alors ils figurent presque toujours par leurs rapports. Ex. dérivée, vitesse en mécanique.

Pour justifier leur utilité, il faut établir le théorème suivant, qui permet de remplacer un infiniment petit α par un autre α', lorsque leur rapport a pour limite l'unité.

1er Théorème. - Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ de deux infiniment petits peut être remplacé par le rapport $\frac{\alpha'}{\beta'}$ de deux infiniment petits respectivement équivalents à α et β.

En effet on a identiquement :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \times \frac{\alpha}{\alpha'} \times \frac{\beta'}{\beta}$$

Mais par hypothèse $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta'}{\beta}$ tendent vers l'unité.

On a donc $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \lim\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)$ C.Q.F.D.

Ce théorème peut aussi s'énoncer :

<u>Si on cherche le rapport de deux infiniment petits on peut négliger les infiniment petits d'ordre supérieur.</u>

En effet si le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ tend vers l'unité comme dans le théorème précédent on peut écrire

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \varepsilon$$

ε tendant vers 0 avec α et α'. D'où

$$\alpha - \alpha' = \alpha'\varepsilon$$

La différence négligée $\alpha'\varepsilon$ est infiniment petite par rapport à α et à α' ; car son rapport à α' tend vers 0. On peut donc négliger les infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que l'on considère.

On dit qu'un infiniment petit β est d'ordre n par rapport à un infiniment petit α appelé infiniment petit principal, lorsque le rapport $\frac{\beta}{\alpha^n}$ a une limite finie A.

On peut alors poser

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = A + \varepsilon$$

ε tendant vers 0 avec α et β ; d'où

$$\beta = A\alpha^n + \varepsilon\alpha^n$$

$A\alpha^n$ s'appelle la partie principale de l'infiniment petit β ; $\varepsilon\alpha^n$ est négligeable vis à vis de cette partie principale

Il peut y avoir des infiniment petits qui ne sont d'aucun ordre, c'est-à-dire pour lesquels l'ordre n n'est pas un nombre fini.

Ex. $\alpha L \alpha$, $e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$

Dérivées et Différentielles.

Dérivée. – Lorsqu'une fonction est définie, il existe pour chaque valeur de la variable une autre fonction appelée dérivée : c'est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable lorsqu'ils tendent simultanément vers 0.

Notation différentielle. – On représente souvent la dérivée d'une fonction $f(x)$ par la notation $f'(x)$.

Il est dans bien des cas plus commode d'introduire les différentielles. On appelle différentielle d'une fonction y le produit de la dérivée par l'accroissement de la variable ; on la représente par dy. Si y est une fonction de x représentée par $f(x)$, h étant l'accroissement de x, on a par définition

$$dy = h f'(x)$$

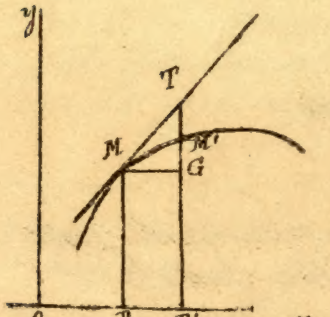
Si j'applique cette relation à la fonction $y = x$ il vient

$$dx = h$$

On écrira donc toujours :

$$dy = f'(x)\, dx \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Cette notation telle que nous venons de la fixer ne fait pas intervenir les quantités x et y de manière symétrique : dx est l'accroissement arbitraire donné à x ; dy est le produit de cet accroissement par la dérivée. Si nous considérons une courbe représentant la fonction considérée ; et sur elle un point M de coordonnées x et y, la dérivée $f'(x)$ est la tangente trigonométrique de l'angle de la tangente à la courbe en M avec l'axe des x. – Je donne à l'abscisse x (OP) l'accroissement dx (PP'), soit M', T et G les points d'abscisse $x+dx$ sur la courbe, sur la tangente en M, et sur la parallèle à l'axe des x menée par le point M. On a évidemment



$$GT = f'(x)\, dx$$

La longueur GT représente donc la différentielle dy
Il en résulte la définition suivante des différentielles
« Les différentielles dx et dy des 2 variables x et y sont les accroissements de celles-ci lorsque le point que l'on considère se déplace sur la tangente ». Ou bien encore en supprimant toute idée géométrique.

« Les différentielles dx et dy sont deux quantités dont l'une est arbitraire et dont le rapport est celui des accroissements infiniment petits donnés simultanément à x et à y ».

Les quantités dx et dy sont donc ces accroissements infiniment petits à un facteur numérique près, et on suppose souvent ce facteur égal à un. (=1)

Différentielles de fonctions de plus d'une variable.

On considère souvent des fonctions de plusieurs variables, de deux par exemple, de la forme $z = \varphi(x, y)$

Par définition la différentielle dz de la fonction $z = \varphi(x, y)$ s'obtient en ajoutant la différentielle prise par rapport à x en considérant y comme constant et la différentielle prise par rapport à y en considérant x comme constant.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Cette définition ne sera justifiée que si on démontre que cette différentielle dz peut remplacer l'accroissement infiniment petit de z quand $\underline{x}$ augmente de $\underline{h}$ ou de $\underline{dx}$ et $\underline{y}$ de $\underline{k}$ ou de $\underline{dy}$.

Cet accroissement est :

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)$$

qu'on peut écrire

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y) + \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial \varphi(x+h, y)}{\partial y} k.$$

L'accroissement infiniment petit h donné à x dans la fonction $\varphi(x, y)$ change infiniment peu le résultat de la dérivation ; donc en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur on a

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{\partial \varphi}{\partial y} k$$

soit la fonction particulière

$$z = x$$

on a :

$$dz = dx = h$$

soit $\quad z = y \quad dz = dy = k$

donc on a bien

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

Interprétation géométrique.- Considérons la surface $z = \varphi(x\ y)$ et sur cette surface le point $x\ y\ z$. A partir de ce point considérons le point $(x+dx, y+dy, z+dz)$ En ne négligeant que des infiniment petits d'ordre supérieur, on peut dire que dans le voisinage du point $x, y\ z$ la surface peut être remplacée par son plan tangent. Le point $(x+dx, y+dy, z+dz)$ est rigoureusement dans le plan tg. D'abord en variant, il décrit un plan

Posons en effet

$$x + dx = t$$
$$y + dy = u$$
$$z + dz = v$$

d'où

$$dx = t - x$$
$$dy = u - y$$
$$dz = v - z$$

en portant dans

$$(1) \quad dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

on a

$$v - z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u - y)$$ éq. d'un plan passant p

Donc le point $(x+dx, y+dy, z+dz)$ est sur un plan passant par le point (x, y, z).

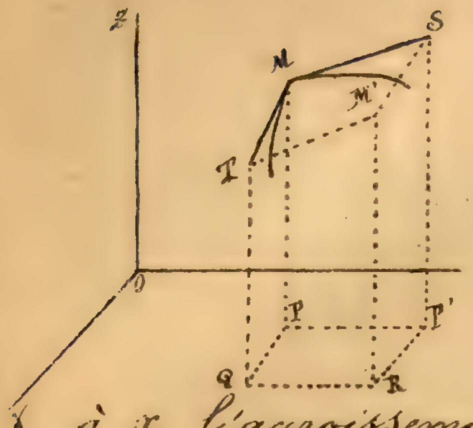
Il est facile de voir que l'équation (1) qu'on écrit généralement :

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

en posant

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$$

représente le plan tangent à la surface au point (x, y, z).



Soit M le point (x.y.z) se projetant sur le plan des x.y au point P. Si je donne à la fois à x l'accroissement dx et à y l'accroissement dy, la projection du point vient en R.

Mais j'aurai évidemment le même accroissement de z en passant de P à P' puis de P' à R. Je donne donc d'abord à x l'accroissement dx. Cela revient à prendre un dz égal à $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ dx, c'est-à-dire à considérer y comme constant et à se déplacer sur la tangente en M à la courbe intersection de la surface avec le plan parallèle à celui des zx passant par M. (y constant)

On ira donc de M en S. De même en donnant seulement à y l'accroissement dy on va de M en T.

En prenant le quatrième sommet du parallélogramme de côtés MS, MT on a le point de coordonnées (x+dx, y+dy, z+dz) et ce point qui a pour projection R est bien dans le plan tangent au point M.

Ici dx et dy sont des accroissements arbitraires et dz est déterminé quand dx et dy sont donnés. Mais il en serait évidemment de même si dx et dz par exemple étaient des accroissements arbitraires. On peut toujours écrire le plan tangent sous la forme :

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

dx dy dz étant trois quantités dont deux sont arbitraires.

2e Leçon.

Soit une fonction u de n variables indépendantes x_1 $x_2 \dots x_n$; sa différentielle est par définition

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots\dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}$ désignant toujours la dérivée prise par rapport à x_1, en considérant $x_2 \dots x_n$ comme des constantes, etc...

L'utilité de cette définition résulte de ce que, quand x_1 augmente de dx_1, x_2 de $dx_2 \dots x_n$ de dx_n, du représente l'accroissement de la fonction u en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. On le démontrerait exactement comme dans le cas d'une fonction de deux variables en remarquant que la dérivée d'une fonction par rapport à une variable diffère d'une quantité infiniment petite de la dérivée par rapport à la même variable de la fonction où on a donné à une ou plusieurs variables des accroissements infiniment petits.

Ces règles nous donnent le moyen de différentier des équations. Ainsi soit l'équation

$$z = \varphi(x, y)$$

on a

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

si on a $\varphi(x, y) = 0$ alors z est constamment nul et $dz = 0$ donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

d'où on peut tirer

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

De même si on a

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

On en tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

Soit maintenant un système quelconque d'équations entre un nombre quelconque d'inconnues, ainsi m équations entre $m+n$ inconnues

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1 (x_1, x_2 \dots x_{m+n}) = 0 \\ \varphi_2 (x_1, x_2 \dots x_{m+n}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m (x_1, x_2 \dots x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

On ne dit pas quelles sont les variables, ni quelles sont les fonctions de ces variables. Le nombre des dérivées ainsi défini serait très grand.

Le rapport $\frac{\partial x_k}{\partial x_i}$ n'est pas une définition suffisante. On dit que x_k est une variable dépendante, x_i une variable indépendante; mais on ne spécifie pas la nature des autres variables.

Pour les différentielles, aucune ambiguité. On tire du système (1) un système de m équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots\dots\dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots\dots\dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0 \end{cases}$$

d'où on peut tirer par exemple en supposant $K > n$

$$dx_k = P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + \dots\, P_n\, dx_n.$$

en résolvant le système par rapport aux m différentielles $dx_{n+1} \dots dx_{n+m}$

On aura donc

$$\begin{cases} dx_{n+1} = \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_{n+m} = \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et quel que soit le système de variables adopté les relations entre les dérivées dépendent de ce

seul système.

Il peut arriver que le système d'équations différentielles soit indéterminé ou incompatible.

Ainsi soient les deux fonctions

$$\text{(I)} \quad u = \varphi(x, y)$$

$$\text{(II)} \quad v = F(x, y)$$

— Si l'on considérait les dérivées, le symbole $\frac{\partial u}{\partial x}$ pourrait avoir deux significations distinctes : on peut d'abord prendre $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans (I) en laissant y constant, mais on peut aussi tirer y de (II) et porter dans (I), ce qui donnera une équation de la forme

$$u = \theta(x, v)$$

On aura une nouvelle dérivée qu'on pourra aussi appeler $\frac{\partial u}{\partial x}$ en prenant la dérivée par rapport à x de $\theta(x, v)$ où l'on suppose v constant.

Si l'on différencie (I) et (II) on obtient

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases}$$

d'où l'on tire en général

$$dx = P\, du + Q\, dv$$

Mais si l'on a

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

le système (III) ne donnera pas dx et dy. Il sera incompatible ou indéterminé. Pour qu'il soit indéterminé il faut qu'il y ait une certaine relation entre du et dv. Cela veut dire que u est fonction de v.

Réciproquement si on a $u = \varphi(v)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial y}$$

on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

et cette condition est nécessaire et suffisante.

— <u>Généralisation : Condition pour que deux fonctions de n variables dépendent l'une de l'autre :</u>

Soient $u = \varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$

$$v = F(x_1, x_2 \dots x_n)$$

on a

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \dots\dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n$$

$$dv = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \dots\dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n$$

Généralement on peut choisir arbitrairement du et dv à moins que les coéfficients ne soient proportionnels. Réciproquement, si les dérivées sont proportionnelles il y a une relation entre du et dv ; u est fonction de v

— <u>Condition pour que n fonctions de n variables soient dépendantes, quelles que soient les valeurs données aux variables.</u>

Soient les fonctions

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ \text{-------------------} \\ u_n = \varphi_n(x_1, x_2 \dots x_n) \end{cases}$$

Je prends les différentielles de chaque fonction

$$du_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots\dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$\text{-------------------}$$

$$du_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots\dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n$$

Il n'y a de relation entre $du_1, du_2 \dots du_n$ et par suite entre $u_1, u_2 \dots u_n$, que si le déterminant des dérivées partielles appelé <u>déterminant fonctionnel</u>

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est nul.

Applications.

— 1° Condition pour que les normales à une surface passent par un même point.

Soit $F(x,y,z)=0$ la surface. La normale au point x,y,z a pour équations

$$\frac{t-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{u-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{v-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

La condition pour qu'elle passe par le point $\alpha.\beta.\gamma$ est :

$$\frac{\alpha-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\beta-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\gamma-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Les numérateurs sont proportionnels aux dérivées partielles de la fonction

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

Si donc je désigne par Σ cette fonction, $F(x.y.z)$ est fonction de Σ. En résolvant par rapport à Σ, on trouve que l'équation $F(x.y.z)=0$ représente une série de sphères concentriques et de centre le point $(\alpha.\beta.\gamma)$.

— 2° Quelles sont les surfaces dont les normales rencontrent toutes une même droite.

Soit $F(x.y.z)=0$ une de ces surfaces, la normale au point $x.y.z$ a pour équations

$$\text{(I)}\quad \frac{t-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{u-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{v-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Je suppose que la droite fixe passe par l'origine des coordonnées. Soient

$$\text{(II)}\quad \frac{t}{a}=\frac{u}{b}=\frac{v}{c}$$ ses équations

La condition pour que les droites (I) et (II) se rencontrent est :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

De ce que ce déterminant est nul il résulte qu'il existe ~~une relation~~ entre les dérivées partielles des fonctions

$$x^2+y^2+z^2$$
$$F(x.y.z)$$
$$ax+by+cz$$

la relation nécessaire pour que ces fonctions elles-mêmes ne soient pas indépendantes.

~~et par suite entre les fonctions elles-mêmes~~. L'équation de la surface est donc fonction de $x^2+y^2+z^2$ et de $ax+by+cz$ elle est donc de la forme $\phi(x^2+y^2+z^2,\ ax+by+cz)=0$ C'est là l'équation générale des surfaces de révolution.

— 3° Quelles sont les surfaces pour qui tous les plans tangents sont parallèles à une même droite.

Soient:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{c} z \\ y = \frac{b}{c} z \end{cases} \qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

la droite et $F(x.y.z)=0$ la surface. Le plan tangent au point $(x.y.z)$ est:

$$(t-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(v-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

La condition pour que ce plan soit parallèle à la droite est:

$$a\frac{\partial F}{\partial x}+b\frac{\partial F}{\partial y}+c\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

cette relation peut s'écrire:

$$\frac{1}{c}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \end{vmatrix} = 0$$

ce qui montre de la même manière que dans l'exemple précédent qu'il y a une relation entre les fonctions

$$F(x.y.z),\ -cy+bz,\quad cx-az$$

ou que $F(x.y.z)$ peut s'écrire $\phi(cy-bz,\ cx-az)=0$

La surface est donc un cylindre et ses génératrices ont

pour équations
$$\begin{cases} cy - bz = \alpha \\ cx - az = \beta \end{cases}$$

— 4° Quelles sont les surfaces dont les plans tangents passent par un point fixe.

La condition pour que le plan tangent au point $x.y.z$ passe par le point fixe $(\alpha.\beta.\gamma)$ est :
$$(\alpha - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\beta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\gamma - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$
relation qui peut s'écrire :
$$-(z-\gamma)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{1}{z-\gamma} & 0 & -\frac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-\gamma} & -\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2} \end{vmatrix} = 0$$

Il y a donc une relation entre
$$F(x.y.z)$$
$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$$
$$\frac{y-\beta}{z-\gamma}$$

L'équation générale des surfaces considérées est donc :
$$\Phi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right) = 0$$
Ces surfaces sont des cônes.

L'éq. devient en effet. $\Phi(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) = 0$, homogène.

3e Leçon.

Surfaces développables.-

On appelle surface réglée, une surface engendrée par une droite mobile se déplaçant suivant une loi déterminée.

Si l'on cherche le plan tangent en un point de cette surface, il contient, évidemment, toute génératrice de la surface passant au point donné, car il contient les tangentes à toutes les courbes de la surface passant par ce point.

On constate immédiatement que les plans tangents aux diférents points d'une même génératrice sont variables de position: ils passent tous par la génératrice considérée.

Ceci posé, on appelle surface développable, toute surface réglée pour laquelle le plan tangent est le même tout le long d'une même génératrice.

Problème. Etant donnée une surface par son équation

$$z=\varphi(x,y)$$

je me propose de chercher les conditions pour que ses plans tangents la touchent en une infinité de points et la forme de la ligne de contact.

L'équation du plan tangent au point de coordonnées $(x.y.z)$ sera:

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy-dz=0$$

ou:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$

en posant: $p=\frac{\partial z}{\partial z}$ $q=\frac{\partial z}{\partial y}$

Il peut s'écrire:

$$Z-pX-qY=z-px-qy$$

ou en posant $z-px-qy=\varepsilon$ l'éq. de ce plan est donc:

$$Z-pX-qY=\varepsilon$$

Ce plan tangent sera le même en une série de points de la surface si en donnant à x, y, z, les diverses valeurs des coordonnées de ces points les quantités p, q, r restent constantes. Je puis trouver une infinité de points de la surface qui donnent à q la valeur q ~~et ces points sont situés sur une [illegible] leurs coordonnées vérifient la relation~~

Il faut aussi que pour les mêmes valeurs de ces coordonnées p et r restent aussi constants, c. à. d. que p et r soient deux fonctions de la quantité q, que je représenterai par

$$p = f(q)$$
$$r = F(q)$$

Il est à remarquer que la dernière condition est entraînée par la précédente. En effet quel que soit le point choisi sur la surface on a par définition.

$$r = z - px - qy$$
$$dr = dz - pdx - qdy - xdp - ydq$$

mais par la définition même de p et de q $\quad dz = pdx + qdy$

$$dz - pdx - qdy = 0$$

donc (1) $dr = -(xdp + ydq)$

ceci montre que r est constant en même temps que p et q, r est alors une certaine fonction de q définie par l'équation (1) que je puis écrire

$$F'(q) = -\left[x f'(q) + y\right]$$

Ceci posé pour chercher l'équation de la ligne de contact il suffit de déterminer deux relations différentes auxquelles satisfont tous les points de contact du plan tangent considéré, la première d'entre elles est l'équation du plan tangent $z - qy - f(q)x = F(q)$ (2)

La deuxième sera l'équation

$$(3) \quad F'(q) = -\left[x f'(q) + y\right]$$

qui, ainsi que cela résulte de l'analyse précédente, est satisfaite par les coordonnées de tous les points de la surface qui satisfont aux conditions que les valeurs correspondantes de p et de q soient égales aux valeurs constantes données p et q. La ligne de contact est alors définie par les équations du premier degré (2) et (3). C'est donc une droite et par suite la surface considérée est développable.

~~D'ailleurs en tout point de la ligne on a~~
~~$\frac{\partial z}{\partial x} = C^{te}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = C^{te}$ et ce sont les équations différentielles d'une droite.~~

On a vu qu'une surface développable est le lieu des droites définies par les deux équations

$$(1) \quad F(q) = z - f(q)x - qy$$
$$F'(q) = -\left[x f'(q) + y\right]$$

qui contiennent un paramètre variable q.

La première peut être considérée comme l'équation la plus générale d'un plan contenant un paramètre variable. En effet, étant donnée une telle équation on pourra toujours lui donner la forme (1): car il suffit de ramener le coefficient de z à l'unité et de désigner par q le coefficient de y; alors les deux autres coefficients seront des fonctions du paramètre variable et par suite de q et elles pourront toujours être représentées par les symboles F et f qu'on a supposés absolument quelconques.

La deuxième équation est celle que l'on obtient en dérivant la première par rapport au paramètre variable; nous voyons donc qu'une surface développable peut être définie par les équations.

$$(1) \qquad Ax + By + Cz = H$$

$$(2) \qquad x\,dA + y\,dB + z\,dC = dH$$

où A, B, C, H sont des fonctions d'une même variable indépendante.

Il est aisé de démontrer que réciproquement la surface ainsi définie jouit de la propriété fondamentale des surfaces développables.

Théorème. Le plan tangent à la surface définie par les équations (1) et (2) est le même tout le long d'une génératrice.

En effet pour définir le plan tangent je différentie: il vient:

$$(3) \quad A\,dx + B\,dy + C\,dz + x\,dA + y\,dB + z\,dC = dH.$$

Mais en tenant compte de l'équation (2) l'équation (3) se simplifie il vient :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

Elle définit la position du plan tangent il est indépendant de x, y, z et il reste fixe lorsque A, B, C restent constants c. à. d. lorsque le point se déplacera sur une génératrice.

…caractéristiques
…développable
…perpendiculaire
…mobile tangente à
…une courbe

— En général des droites qui se succèdent d'une manière quelconque dans l'espace ne sont pas tangentes à une même courbe.

Supposons en effet les droites définies par deux équations contenant un paramètre variable. On veut une courbe à laquelle toutes les droites soient tangentes. Il suffit de se donner une troisième équation représentant une surface dont l'intersection avec la surface réglée déterminera la courbe.

Nous prendrons les différentielles de ces trois équations, nous en tirerons des quantités proportionnelles à dx, dy, dz en éliminant la différentielle du paramètre, et ces quantités devront être proportionnelles aux coefficients directeurs de la droite.

Soient

$$(1) \quad x = az + p$$

$$(2) \quad y = bz + q$$

les équations de la droite.

Je devrai avoir $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dy}{b} = \dfrac{dz}{1}$

Pour définir le plan tangent en un point de coordonnées (x, y, z) je différentie les équations (1) et (2) il vient :

$$dx = a\,dz + z\,da + dp$$
$$dy = b\,dz + z\,db + dq$$

Comme on doit avoir
$$dx = a\,dz$$
$$dy = b\,dz$$

il faut que l'on ait
$$z\,da + dp = 0$$
$$z\,db + dq = 0$$

satisfaites pour la même valeur de z

et pour cela que

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

cond. nécess. et suff. pour que la mobile soit tg. à une courbe —

J'dis que Les droites

$$\begin{cases} F(q) = z - x f(q) - y q \\ F'(q) = -\left[x f'(q) + y\right] \end{cases}$$

qui définissent une surf. dévelop.

sont toujours tangentes à une courbe. En effet, on a écrit $x = \alpha z + \pi$, $y = \beta z + \chi$, α, π, β, χ étant fonct. d'un m. param. q.
Différentiant par rapp. à q, $0 = z\,d\alpha + d\pi$, $0 = z\,d\beta + d\chi$, d'où $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{d\pi}{d\chi}$, qui est la cond. précédente. —

Les coordonnées x.y.z de la courbe satisfaisant à ces deux équations satisfont aux équations obtenues en différentiant celles-ci

$$\text{I} \quad dz - dx\,f(q) - x f'(q)\,dq - y\,dq - q\,dy - F'(q)\,dq = 0$$

$$\text{II} \quad -dx\,f'(q) - dy - x f''(q)\,dq - F''(q)\,dq = 0$$

Ces deux équations adjointes à une troisième me donneront des quantités proportionnelles à dx, dy, dz définissant la tangente à la courbe. Ces différentielles doivent coïncider avec les dx. dy. dz tirés des équations de la droite et de la troisième équation. Mais ici q n'est plus une variable comme précédemment, dq est donc nul.

Donc pour que les différentielles soient respectivement proportionnelles, il faut que la somme des coefficients de dq soit nulle dans les équations I et II, ce qui est vérifié car quel que soit q, il y a un point sur la courbe vérifiant la relation:

$$-x f'(q) - y - F'(q) = 0$$

qui est une des éq. de la droite

et par suite la différentielle prise en regardant q comme seule variable

$$\left(-x f''(q) - F''(q)\right) dq = 0$$

Il faut encore montrer que les dx dy dz de la courbe sont proport. aux coeff. de la droite pour montrer que celle-ci est tangente — Différentions donc les éq. de la dr. on a I et II. Ainsi on n'a pas 4 éq. mais 3 seulement puisque l'une des éq. de la droite est satisfaite. Éliminant q entre ces éq. on a la courbe

Nous venons de démontrer que dans une surface développable toutes les génératrices sont tangentes à une même courbe.

— Réciproquement : le lieu des tangentes à une courbe gauche est une surface développable. Cela revient à démontrer que la condition pour

que toutes les génératrices d'une surface réglée soient tangentes à une même courbe est la même que la condition pour que le plan tangent soit le même tout le long d'une génératrice

Soient :

$$(\alpha)\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

les équations de la droite mobile. Pour qu'elle soit constamment tangente à une même courbe il faut que l'on ait :

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}$$

et les points de la courbe sont donnés par

$$z\,da + dp = 0$$

Je cherche maintenant la condition pour que le plan tangent soit le même tout le long de la génératrice. La surface est définie par l'élimination d'un paramètre variable λ entre les équations (α). Je les différentie pour avoir le plan tangent en un point $(x.y.z)$

$$\begin{aligned} dx &= a\,dz + z\,da + dp \\ dy &= b\,dz + z\,db + dq \end{aligned}$$

$a.b.p.q$ étant fonctions de λ, $da\ db\ dp\ dq$ contiennent $d\lambda$ en facteur, l'élimination de $d\lambda$ est donc immédiate, elle conduit à l'équation :

$$\frac{dx - a\,dz}{dy - b\,dz} = \frac{z\,da + dp}{z\,db + dq} = (G)$$

Cette équation du premier degré en dx, dy, dz ne contient plus $d\lambda$. Elle représente le plan tangent et peut se mettre sous la forme $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$. Désignons par G la fraction second membre divisée haut et bas par $d\lambda$.

L'équation du plan tangent au point $x.y.z$ est

$$\text{I} \quad (X - x) - a(Z - z) - \left[Y - y - b(Z - z)\right] G = 0 .$$

Je prends ensuite le plan tangent au point (x', y', z') sur la même génératrice que (x, y, z)

$$\text{II} \qquad (X-x') - a(Z-z') - \left[Y - y' - b(Z-z')\right] G' = 0$$

en posant $G' = \dfrac{z'da + dp}{z'db + dq}$

Pour que les plans (I) et (II) coïncident il faut évidemment $G = G'$ et on voit immédiatement que la condition est suffisante. Pour que $G' = G$, quel que soit z', le point x', y', z' étant sur la génératrice, il faut et il suffit que G soit indépendant de z et pour cela que

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}$$

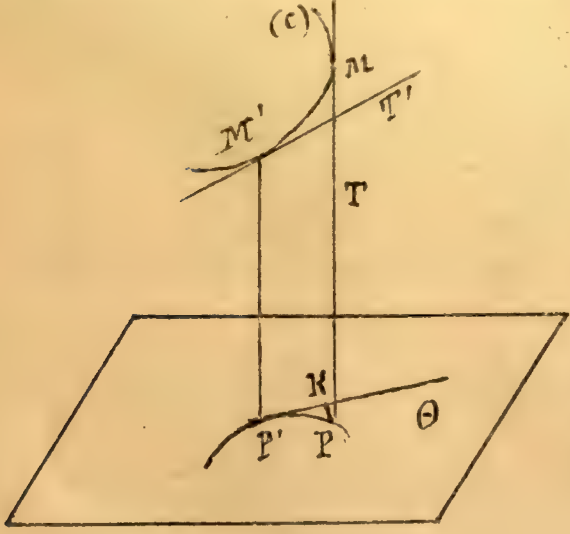
c'est là la condition de tangence de toutes les génératrices à une même courbe gauche.

C. Q. F. D.

Au lieu de dire que toutes les génératrices sont tangentes à une même courbe on préfère souvent dire que deux génératrices consécutives se rencontrent.

Cela n'est pas rigoureusement exact : deux génératrices quelles que voisines qu'elles soient ne se rencontrent jamais, à moins qu'on ne passe à la limite et alors elles sont confondues.

Mais ce qui est vrai c'est que la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre, au lieu d'être du premier comme dans les autres surfaces.



On peut le démontrer géométriquement. Soit (C) une courbe je considère deux tangentes infiniment voisines et je prends un plan de projection perpendiculaire à l'une des tangentes, l'autre tangente M'T' se projette suivant la tangente P'Θ et la plus courte distance des deux tangentes, suivant PK.

L'arc MM' est du premier ordre, PP' qui est égal à MM' sin M'MT du second et par conséquent PK qui est égal à PP' sin PP'K du troisième.

4ème Leçon

Changement de variables

Problème Une fonction dépend de plusieurs variables indépendantes, elle a une dérivée par rapport à chacune d'elles. Ces dérivées étant supposées connues, on change de variables et on se propose de calculer les dérivées de la fonction par rapport aux nouvelles variables.

Soit $u = \varphi\,(x_1 . x_2 \ldots\ldots x_n)$ une fonction des variables $x_1 . x_2 \ldots x_n$ dont je connais les dérivées.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = P_1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = P_2$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_n$$

Je substitue à $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ les variables $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n$ et je me propose de calculer

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = Q_1$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = Q_2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_n} = Q_n$$

$Q_1\ Q_2 \ldots\ldots Q_n$ sont liés à $P_1\ P_2 \ldots\ldots P_n$ par les égalités

$$(1) \qquad du = P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + \ldots\ldots + P_n\, dx_n$$

$$(2) \qquad du = Q_1\, dy_1 + Q_2\, dy_2 + \ldots\ldots + Q_n\, dy_n$$

Dans le second membre je remplace $dy_1, dy_2 \ldots\ldots dy_n$ par leurs valeurs en fonctions de $dx_1, dx_2 \ldots\ldots dx_n$

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\, dx_n$$

$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\, dx_n$$

J'égale dans les seconds membres de (1) et de (2) les coëfficients de $dx_1 \quad dx_2 \ldots\ldots dx_n$

$$P_1 = \varphi_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \varphi_n \frac{\partial y_n}{\partial x_1}$$

On pouvait l'écrire immédiatement en remarquant que P_1 est la dérivée par rapport à x_1 de la fonction n composée des variables $y_1 \; y_2 \ldots\ldots y_n$

Transformation de quelques équations différentielles

Définition des fonctions homogènes.— On appelle fonction homogène d'un nombre quelconque de variables $x_1 \; x_2 \ldots\ldots x_n$, toute fonction de ces variables telle que lorsque l'on multiplie chacune de ces variables par un même facteur α, la fonction se trouve multipliée par une puissance du facteur α, l'exposant de cette puissance est appelé degré d'homogenéité de la fonction. Une telle fonction est définie par l'égalité

$$\varphi(\alpha x_1 \; \alpha x_2 \ldots \alpha x_n) = \alpha^m \varphi(x_1 \; x_2 \ldots x_n)$$

La forme générale d'une fonction homogène est

$$\varphi(x_1 \; x_2 \ldots x_n) = x_1^m \psi\left(\frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_1} \ldots \frac{x_n}{x_1}\right) \qquad (1)$$

la fonction ψ étant absolument quelconque.
Tout d'abord il est évident que la fonction (1) est homogène; je dis que réciproquement toute fonction homogène de degré m est de cette forme.—
En effet je pose $\alpha = \frac{1}{x_1}$ et de l'éq. de définition, je déduis

$$\varphi\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1^m} \varphi(x_1, \ldots x_n)$$

ce qui est précisément l'éq. (1).

~~$t_1 = \frac{x_2}{x_1}$~~

~~$t_2 = \frac{x_3}{x_1}$~~

~~$t_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}$~~

~~et je prends comme variables nouvelles $t_1 \; t_2 \ldots t_{n-1}$ et x_1~~
~~La fonction $\varphi(x_1 \; x_2 \ldots x_n)$ devient alors~~

~~$\varphi(x_1, t_1 x_1, t_2 x_1, \ldots t_{n-1} x_1)$~~

~~et l'égalité de définition de la fonction homogène devient~~

~~$\varphi(\alpha x_1, \alpha t_1 x_1, \alpha t_2 x_1 \ldots \alpha t_{n-1} x_1) = \alpha^m \varphi(x_1, t_1 x_1 \ldots t_{n-1} x_1)$~~

~~Donc lorsque dans la fonction de x_1 représentée par $\varphi(x_1, t_1 x_1 \ldots\ldots t_{n-1} x_1)$ on multiplie x_1 par α, la fonction se trouve multipliée par α^m, donc la fonction contient x_1^m en facteur et l'on a~~

~~$\varphi(x_1 \; x_2 \ldots x_n) = x_1^m \psi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}\right)$~~

C.Q.F.D.

Théorème des fonctions homogènes. — Soit une fonction homogène définie par la relation

$$\varphi(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3 \dots \alpha x_n) = \alpha^m \varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$$

Dérivant par rapport à α il vient

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha x_1)} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha x_2)} \text{——} + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha x_n)} = m\alpha^{m-1}\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$$

Je fais $\alpha = 1$ dans cette identité, remarquant que $\frac{\partial \varphi}{\partial(\alpha x_1)}$ devient identique à $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, il vient

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \text{——} + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = m\,\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$$

Cette égalité constitue le théorème des fonctions homogènes ; la somme des produits de chaque variable par la dérivée de la fonction par rapport à celle-ci est égale à m fois la fonction si m est le degré d'homogénéité de la fonction.

Réciproquement on peut démontrer en toute rigueur que toute fonction u des n variables $x_1\ x_2 \dots x_n$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \dots\dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = m u$$

est une fonction homogène du $m^{\text{ième}}$ degré des n variables.

En effet je change de variables et prends pour variables les n quantités

$$x_1$$
$$t_1 = \frac{x_2}{x_1}$$
$$t_2 = \frac{x_3}{x_1}$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$t_{n-1} = \frac{x_n}{x_1}$$

De ces formules de transformation on tire les expressions des différentielles

$$dt_1 = \frac{x_1 \partial x_2 - x_2 \partial x_1}{x_1^2}$$

$$dt_2 = \frac{x_1 \partial x_3 - x_3 \partial x_1}{x_1^2}$$

$$dt_{n-1} = \frac{x_1 \partial x_n - x_n \partial x_1}{x_1^2}$$

Ceci posé je considère l'identité

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 \dots + \frac{\partial u}{\partial t_{n-1}} dt_{n-1}$$

Remplaçant $dt_1 \; dt_2 \dots dt_{n-1}$ par leurs valeurs il vient

$$du = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1^2}\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{x_3}{x_1^2}\frac{\partial u}{\partial t_2} \dots - \frac{x_n}{x_1^2}\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}\right] dx_1 + \left[\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right] dx_2 + \left[\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right] dx_3 \dots + \left[\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}\right] dx_n$$

Cette égalité ne doit pas différer de l'identité

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

On a donc

$$x_1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1^2}\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{x_3}{x_1^2}\frac{\partial u}{\partial t_2} \dots - \frac{x_n}{x_1^2}\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}$$

$$x_2 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1}$$

$$x_3 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

$$x_n \qquad \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}$$

Portant ces valeurs dans l'équation différentielle donnée il vient entre les nouvelles dérivées la relation

$$x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{x_3}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2} \dots - \frac{x_n}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}} + \frac{x_2}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{x_3}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_2} \dots + \frac{x_n}{x_1}\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}} = mu$$

cette relation se réduit à

$$x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = mu$$

ou

$$(1) \qquad \frac{x_1}{\partial x_1} = m\,\frac{u}{\partial u}$$

Telle est la relation entre les dérivées de la fonction prises par rapport aux nouvelles variables, et qui équivaut à la relation différentielle donnée. Elle fait voir que la fonction est une fonction quelconque de $t_1\, t_2 \dots t_{n-1}$, puisque les différentielles [illegible] n'entrent pas [illegible] en prenant les fonctions primitives des deux membres de l'équation (1) il vient

$$m\, L\, x_1 + LK = L\, u$$

$$\text{d'où} \quad u = x_1^m K$$

La quantité K est une constante par rapport à x_1, mais c'est une fonction des autres variables, qui d'ailleurs est

absolument quelconque d'après ce que nous venons de voir, je la désigne par $\varphi(t_1\, t_2 \ldots t_{n-1})$.

On a donc $u = x_1^m\, \varphi(t_1\, t_2 \ldots t_{n-1})$
ou en revenant aux variables primitives

$$u = x_1^m\, \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\, \frac{x_1}{x_3} \ldots \frac{x_1}{x_n}\right)$$

La fonction u est donc bien une fonction homogène du $m^{\text{ième}}$ degré des variables $x_1\, x_2 \ldots x_n$ C.Q.F.D.

Soit donné l'équation différentielle

$$(ay - bx) + \frac{\partial z}{\partial x}(cy - bz) + \frac{\partial z}{\partial y}(az - cx) = 0$$

qui convient comme on sait à toutes les surfaces de révolution dont l'équation est

$$ax + by + cz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

Je me propose de chercher toutes les solutions de l'équation proposée. Pour cela je pose

$$u = ax + by + cz$$
$$v = x^2 + y^2 + z^2$$

Je prends comme variables indépendantes u et v et je considère z comme fonction de u et v. Cela doit nous conduire à un résultat impossible, en effet nous savons (par des considérations géométriques) que toutes les solutions sont comprises dans l'équation

$$u = \varphi(v)$$

Donc les deux variables que nous prenons à la place des deux variables indépendantes x et y, ne sont pas indépendantes.

Pour effectuer le calcul je prends les différentielles

$$du = (a\,dx + b\,dy + c\,dz)$$
$$dv = (2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)$$

Portant dans l'identité

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv$$

il vient

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}(a\,dx + b\,dy + c\,dz) + \frac{\partial z}{\partial v}(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)$$

Cette relation doit se réduire à l'identité

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a\,\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\,\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - c\,\frac{\partial z}{\partial u} - 2z\,\frac{\partial z}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b\,\frac{\partial z}{\partial V} + 2y\,\frac{\partial z}{\partial V}}{1 - c\frac{\partial z}{\partial V} - 2z\,\frac{\partial z}{\partial V}}$$

Portant ces valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans l'equation différentielle donnée il vient une relation entre $\frac{\partial z}{\partial U}$ et $\frac{\partial z}{\partial V}$, cette relation se réduit à

$$ay - bx = 0$$

On arrive à un résultat absurde, donc le changement de variables que l'on a fait n'était pas possible, c'est dire que U et V sont liés par une relation

$$U = \varphi(V)$$

Nous pouvons le voir directement. Considérons en effet U comme fonction de V et z et posons

$$U = \varphi(V, z)$$

nous devons trouver que U est indépendant de z ou que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

J'ai (1) $du = a\,dx + b\,dy + c\,dz = (a + cp)\,dx + (b + cq)\,dy$
en remplaçant dz par $p\,dx + q\,dy$
d'autre part dans $U = \varphi(V, z)$ j'ai

$$\text{(II)}\quad du = \frac{\partial u}{\partial V}\,dV + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = \frac{\partial u}{\partial V}\left[2x\,dx + 2y\,dy + 2z(p\,dx + q\,dy)\right] + \frac{\partial u}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) = dx\left[2\frac{\partial u}{\partial V}(x + pz) + p\frac{\partial u}{\partial z}\right] + dy\left[2\frac{\partial u}{\partial V}(y + qz) + q\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

J'égale les coëfficients de dx et de dy dans (I) et (II) il vient

$$\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial z}(x + pz) + p\frac{\partial u}{\partial z} = a + cp \\ 2\frac{\partial u}{\partial z}(y + qz) + q\frac{\partial u}{\partial z} = b + cq \end{cases}$$

Je multiplie la première par $y + qz$ la seconde par $x + pz$ et je retranche

$$\left[p(y + qz) - q(x + pz)\right]\frac{\partial u}{\partial z} = (a + cp)(y + qz) - (b + cq)(x + pz)$$

ou

$$(py - qx)\frac{\partial u}{\partial z} = ay - bx + \frac{\partial z}{\partial x}(cy - bz) + \frac{\partial z}{\partial y}(az - cx)$$

Le second membre est nul pour tout point de la surface, $py - qx$ ne l'est pas en général (il ne l'est que si la surface est de révolution autour de oz; ~~de cylindre~~ car le déterminant $\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ x & y \end{vmatrix} = 0$

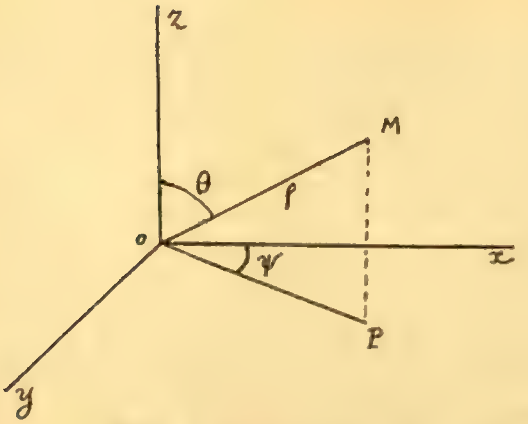
montre que z est fonction de x^2+y^2; $z=\Psi(x^2+y^2)$ donc $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ en général et u est indépendant de z. Le cas particulier qui donne lieu à une apparence d'exception rentre d'ailleurs, comme il est aisé de le voir, dans le cas général

Problème. Soit une surface donnée par son équation entre les coordonnées rectangulaires

$$F(x,y,z)=0$$

on adopte les coordonnées polaires ρ, θ, ψ) définies comme l'on sait (ρ étant la distance du point considéré à l'origine, θ l'angle de la droite qui joint l'origine, à ce point, avec l'axe des z, ψ l'angle de l'axe des x avec la trace sur le plan des $x\,y$ du plan passant par ce point et l'axe des z) et l'on propose, étant données les dérivées de z par rapport à x et à y, p et q, de calculer celles de ρ par rap. à θ et à ψ.

Les formules de transformation peuvent s'écrire :



$$x=\rho\sin\theta\cos\psi$$
$$y=\rho\sin\theta\sin\psi$$
$$z=\rho\cos\theta$$

On a donc entre les six variables ($x, y, z, \rho, \theta, \psi$) quatre équations : elles donnent entre les six différentielles, les quatre relations:

$$dz=p.\,dx+q\,dy$$
$$dz=d\rho.\cos\theta-\rho\sin\theta.\,d\theta$$
$$dx=d\rho.\sin\theta\cos\psi+\rho\cos\theta.\,d\theta.\cos\psi-\rho\sin\theta\sin\psi.\,d\psi.$$
$$dy=d\rho\sin\theta\sin\psi+\rho\sin\psi\cos\theta\,d\theta+\rho\sin\theta\cos\psi.\,d\psi.$$

De ces quatre équations, on déduit immédiatement en éliminant dx, dy, dz, la relation.

$$d\rho\cos\theta-\rho\sin\theta.\,d\theta=p.\left[d\rho\sin\theta\cos\psi+\rho\cos\theta\,d\theta\cos\psi-\rho\sin\theta\sin\psi.\,d\psi\right]+ +q\left[d\rho\sin\theta\sin\psi\ldots\right].$$

On en tire les expressions de $\frac{\partial\rho}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\rho}{\partial\psi}$, en faisant successivement dans cette équation $d\psi$ et $d\theta$ nuls.

Il vient ainsi:

$$d\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\,d\theta=p\left[d\rho\sin\theta\cos\psi+\rho\cos\psi\cos\theta.\,d\theta\right]+q\left[d\rho.\sin\theta\sin\psi+ +\rho\sin\psi\cos\theta.\,d\theta\right]$$

d'où l'on déduit $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}=\frac{\rho[\sin\theta+p\cos\psi\cos\theta+q\sin\psi\cos\theta]}{\cos\theta-p\sin\theta\cos\psi-q\sin\theta\sin\psi}$$

Introduisons dans cette expression x, y, z. A cet effet, je multiplie le numérateur et le dénominateur par $\rho\sin\theta$. Il vient alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}=\frac{x^2+y^2+(px+qy)z}{(z-px-qy)\sin\theta}$$

Le calcul de $\frac{\partial \rho}{\partial \psi}$ se ferait absolument de même. Il est facile de voir pourquoi cette expression contient $(z-px-qy)$ en dénominateur : annuler cette fonction, c'est exprimer que le plan tangent au point considéré passe à l'origine. — Or il est facile de voir que cette même hypothèse s'exprime en écrivant que $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ est infini. — En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut que la tangente à la section de la surface par un plan passant par OZ : ($\psi = C^{te}$) passe par l'origine. Or l'angle de celle-ci avec le rayon vecteur est donné par l'expression :

$$\operatorname{tg} V=\frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}$$

expression qui doit être nulle, ce qui donne bien $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ infini.

Nous pouvons encore calculer séparément $d\rho$ et $d\theta$, puis faire le quotient $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$. On a :

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\cos.\theta=\frac{z}{\rho}$$

Si nous différentions, il vient :

$$\rho\, d\rho = x\,dx+y.\,dy+z.\,dz$$

et :

$$-\sin\theta.\,d\theta=\frac{\rho.\,dz-z.\,d\rho}{\rho^2}$$

Je multiplie les deux termes de la fraction par ρ et remplaçons $\rho.\,d\rho$ et ρ^2 par leur valeur : Il vient

$$\sin\theta.\,d\theta=\frac{z(x\,dx+y\,dy)-(x^2+y^2)\,dz}{\rho^3}$$

On en tire enfin :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta}=\frac{\rho^2\sin\theta(x\,dx+y\,dy+z\,dz)}{z(x\,dx+y\,dy)-(x^2+y^2)\,dz}$$

Mais

$$dz=p.\,dx+q\,dy$$

Faisons cette substitution ; — il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\rho^2 \sin\theta\left[(pz+x)\,dx + (qz+y)\,dy\right]}{\left[zx - p(x^2+y^2)\right]dx + \left[zy - q(x^2+y^2)\right]dy}$$

~~Cette expression n'est pas déterminée ; car dx et dy sont arbitrai-~~ ~~res.~~ Mais nous devons introduire l'hypothèse que ψ est supposé constant. — Or :

$$tg\,\psi = \frac{y}{x}$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$d\psi$ doit être nul , ce qui donne :

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Remplaçons dx et dy par des quantités proportionnelles dans l'expression de $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ Il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\rho^2 \sin\theta\left[(pz+x)x + (qz+y)y\right]}{\left[zx^2 - px(x^2+y^2)\right] + zy^2 - qy(x^2+y^2)}$$

Mais : $\rho^2 \sin^2\theta = x^2 + y^2$

Il reste donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{x^2+y^2+z(px+qy)}{(z-px-qy)\sin\theta}$$

C'est précisément la valeur précédemment trouvée.

$\frac{\partial \rho}{\partial \psi}$ s'obtiendrait par un calcul semblable.

Problème. — On donne une fonction V de deux variables $V = \varphi(x,y)$.

Admettant par rapport à x et à y les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ et, par suite, par rapport aux coordonnées polaires ρ et θ les dérivées $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, je me propose de chercher les unes en fonction des autres. (Il s'agit ici des coord. polaires dans le plan des xy).

Les formules de transformation qui permettent de passer de l'un des systèmes de coordonnées à l'autre sont :

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$tg\,\theta = \frac{y}{x}$$

Différentiant, il vient

$$\rho\,d\rho = x\,dx + y\,dy$$

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

Ceci posé, la différentielle de V peut s'écrire :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta$$

Remplaçant $d\rho$ et $d\theta$ par leurs valeurs, il vient

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} \; \frac{x\,dx + y\,dy}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \; \frac{(x\,dy - y\,dx)\cos^2\theta}{x^2}$$

Or, dans cette expression, le coefficient de dx est la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ et celui de dy la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$.

On a donc en exprimant tout en fonction de ρ et θ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cos\theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cos\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\cos\theta}{\rho}$$

De ces formules on tire la relation remarquable

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2$$

Cas de 3 variables. — Supposons maintenant que l'on considère une fonction V de trois variables. On pourra résoudre le même problème en conduisant les calculs de la même manière.

On a (coord. polaires dans l'espace)

$$(1) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \psi} d\psi$$

avec

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\rho}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x}$$

Différentiant il vient

$$\rho\,d\rho = x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

$$-\sin\theta\,d\theta = \frac{\rho\,dz - z\,d\rho}{\rho^2}$$

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

La relation (1) devient en substituant

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{z(x\,dx + y\,dy + z\,dz) - \rho^2 dz}{\rho^3 \sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\cos^2\psi(x\,dy - y\,dx)}{x^2}$$

On a donc
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{x}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{zx}{\rho^3 \sin\theta} - \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{y}{x^2}\cos^2\psi$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{y}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{zy}{\rho \sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos^2\psi}{x}$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{z}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{z^2-\rho^2}{\rho^3 \sin\theta}$$
ou en n'introduisant que ρ, θ et ψ
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{\rho\sin\theta} \text{ etc.......}$$
Elevant chacune de ces équations au carré et ajoutant, il vient
$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2$$
Ce résultat peut être rapproché d'un résultat simple connu. Si l'on passe d'un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) à un autre système x_1 y_1 z_1, on a pour toute fonction V des 3 coordonnées l'équation
$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2$$
En effet cela résulte immédiatement des formules de transformation
$$x = ax_1 + by_1 + cz_1$$
$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1''$$
d'où :
$$dx = a\,dx_1 + b\,dy + c\,dz_1$$
$$dy = a'\,dx_1 + b'\,dy_1 + c'\,dz_1$$
$$dz = a''\,dx_1 + b''\,dy_1 + c'\,dz_1$$
Substituant dx_1, dy_1, dz_1 à dx dy et dz dans
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$
et prenant les coefficients de dx_1, dy_1, dz_1, il vient
$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = a\frac{\partial V}{\partial x} + a'\frac{\partial V}{\partial y} + a''\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = b\frac{\partial V}{\partial x} + b'\frac{\partial V}{\partial y} + b''\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = c\frac{\partial V}{\partial x} + c'\frac{\partial V}{\partial y} + c''\frac{\partial V}{\partial z}$$

On en tire immédiatement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

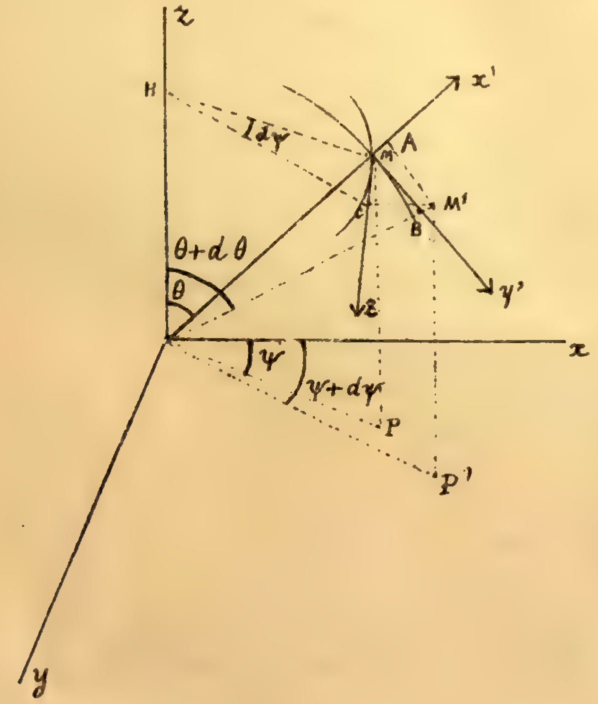
en remarquant que l'on a les équations

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

$$\text{et } aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

Ceci posé, il est facile de voir que la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires peut-être considérée comme passage d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire, s'il s'agit de différences de coordonnées de deux points infiniment voisins (différentielles des coordonnées).

En effet, un point est défini dans le nouveau système par l'intersection de trois surfaces (une sphère de centre O, un plan passant par Oz et un cône de révolution d'axe Oz), ou encore par l'intersection de trois courbes communes à ces surfaces deux à deux, et ces trois courbes sont deux à deux rectangulaires, les plans tangents aux surfaces en leur point commun formant un trièdre trirectangle, dont le sommet a pour coordonnées ρ, θ et ψ.



Ceci posé, si je considère un point M (ρ, θ et ψ) et un autre infiniment voisin M' sur la surface M' ($\rho + d\rho$, $\theta + d\theta$, $\psi + d\psi$), et que je projette en ABC sur les tangentes aux trois courbes passant par M on a évidemment

$$AM = d\rho$$
$$BM = \rho\, d\theta$$
$$CM = MH\, d\psi = \rho \sin\theta\, d\psi$$

ces égalités supposant $d\theta$ et $d\psi$ infiniment petits.

Si je désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point M rapporté à 3 axes rectangulaires, parallèles

à MA, MB, MC, par $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$ celles du point M' rapporté aux mêmes axes, on a

$$dx_1 = d\rho$$
$$dy_1 = \rho\, d\theta$$
$$dz_1 = \rho \sin\theta\, d\psi$$

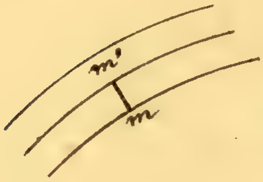
On a donc en appliquant les formules précédemment établies

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2$$

Cette expression a une grande importance surtout en géodésie.

Soit une série de surfaces représentées par l'équation generale (1) $F(x, y, z) = c$. Je cherche l'expression de la distance de deux surfaces infiniment voisines. Pour cela je différencie l'équation (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = dc$$



dx dy dz sont les projections sur les trois axes de la distance $m\,m'$ que je désigne par ε

$$dx = \varepsilon \cos\lambda$$
$$dy = \varepsilon \cos\mu$$
$$dz = \varepsilon \cos\nu \qquad \text{Or}$$

$$\cos\lambda = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

Donc

$$\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = dc$$

Application

On considère en géodosie des surfaces de niveau normales en tous les points à la direction de la pesanteur et sur lesquelles

l'intensité de la pesanteur est toujours la même. La distance de deux pareilles surfaces varie d'un point à un autre. C'est cette remarque qui permet d'expliquer pourquoi on ne trouve pas la même différence de niveau entre deux points A et B quel que soit le chemin pris pour se rendre de A en B.

5ème Leçon

Equations différentielles

On appelle équation différentielle une relation entre une fonction et sa dérivée ou ses dérivées.

On ne peut pas dire qu'on a l'équation différentielle d'une fonction parce que le nombre des équations différentielles d'une fonction est infini

Soit
$$\left\{ \begin{array}{l} F(x;y)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,\dfrac{dy}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

on peut combiner ces deux équations d'une infinité de manière on obtiendra toujours une équation différentielle de la fonction $F(x,y)$

Ainsi soit
$$y = x$$
$$dy = dx$$

mais on peut aussi écrire
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si on prend $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$ on en tire $y = cx$ qui donne comme cas particulier $y = x$ etc...

Pour qu'une équation admette une équation différentielle propre elle doit contenir un paramètre variable. Soit, p. exemple:

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

nous éliminerons α entre cette équation et sa dérivée et nous obtiendrons une relation $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

Je suppose qu'on résolve par rapport à α; en prenant la dérivée par rapport à x par exemple on a une relation où n'entre plus α. Je dis que cette relation est la même que $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ On peut remarquer que si l'on donne x, y, α est déterminé et par suite $\frac{dy}{dx}$; donc la relation à laquelle on aboutit par l'élimination de α doit toujours donner la même valeur pour $\frac{dy}{dx}$, x, y étant donnés. Cette relation est donc toujours la même.

Exemple: Equation différentielle des ellipses homofocales.
Leur équation générale est:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

a étant un paramètre variable. Je différencie cette équation

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{a^2 - c^2} = 0$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = -\frac{y\,dy}{x\,dx}$$

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dx}$$

$$\frac{c^2}{a^2 - c^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{-y\,dy}$$

Je remplace $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^2 - c^2}$ par les valeurs ainsi obtenues dans l'équation (1) il vient

$$\frac{x^2}{c^2}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dx} - \frac{y^2}{c^2}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{y\,dy} = 1$$

$$x\,dy\,(x\,dx + y\,dy) - y\,dx\,(x\,dx + y\,dy) = c^2\,dx\,dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 xy + \frac{dy}{dx}\,(x^2 - y^2) - xy = c^2\,\frac{dy}{dx}$$

Elle convient à toutes les coniques homofocales. Elle est du second degré quoique en chaque point il n'y ait qu'une tangente à une courbe, mais par tout point du plan passent deux coniques et les coëfficients angulaires de ces tangentes sont donnés par l'équation :

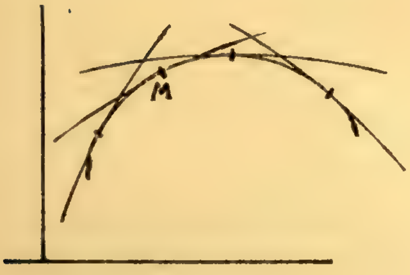
$$m^2 xy + m(x^2 - y^2 - c^2) - xy = 0$$

leur produit est égal à -1 donc elles sont rectangulaires

Nous avons vu que dans le cas où on a l'équation

$F(x, y, \alpha) = 0$ l'équation différentielle $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

est unique. Est-il vrai que réciproquement l'équation primitive soit la solution la plus générale de cette équation différentielle ? Il arrive souvent qu'il faut adjoindre à l'équation générale $F(x, y, \alpha) = 0$ une solution singulière



En général les courbes $F(x, y, \alpha) = 0$ ont une enveloppe et cette enveloppe est une solution singulière de l'équation différentielle. En effet l'équation différentielle $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dy}\right) = 0$ s'obtient en éliminant α entre l'équation (1) et l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

L'enveloppe est définie par les deux équations

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \quad (4)$$

et la tangente à cette enveloppe en un point $M(x, y)$ a une direction satisfaisant à l'équation $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (5)$

obtenue en différentiant l'équation (3) où α est considérée comme variable, mais comme on a en même temps l'équation (4) il

reste pour définir la direction de la tangente

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Cette équation (6) rentre évidemment dans celle que l'on obtient en éliminant (α) entre les équations (1) et (2) puisque la seule différence consistait dans la signification différente attribuée à (α).

Cas de 3 variables. — Si on considère une équation entre 3 variables (représentant une surface) comme précédemment l'équation différentielle ne sera pas déterminée si cette équation ne contient pas de paramètres variables ; mais elle ne le sera pas non plus si elle contient un seul paramètre variable.

En effet soit donnée l'équation

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \quad (1)$$

Elle admet par rapport à l'une des coordonnées (z, par exemple) considérée comme fonction des deux autres, deux dérivées différentes définies par les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Entre ces trois équations on peut éliminer le paramètre variable α d'une infinité de manières, ce qui donne lieu à une infinité d'équations différentielles.

Il est à remarquer qu'en différentiant l'équation (1) il vient une équation de la forme

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

Mais il reste entre dx, dy, dz une relation arbitraire, en faisant successivement dx et dy nuls on obtient les dérivées de z par rapport à y et à x.

Ceci montre en même temps que l'équation différentielle sera déterminée si dans l'équation donnée on introduit deux constantes arbitraires.

Soit en effet l'équation

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \qquad (1)$$

Dérivant successivement par rapport à x puis par rapport à y il vient les deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

Entre ces 3 équations ont peut éliminer le paramètre variable (α) d'une infinité de manières, ce qui donne lieu à une infinité d'équations différentielles.

Il est à remarquer qu'en différentiant l'équation (1) il vient une équation de la forme

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

Mais il reste entre dx, dy, dz une relation arbitraire, en faisant successivement dx et dy nuls ont obtient les dérivées de z par rapport à y et à x.

Ceci montre en même temps que l'équation différentielle sera déterminée si dans l'équation donnée on introduit deux constantes arbitraires.

Supprimée

Soit en effet l'équation

$$F(x, y, z, \alpha\, \beta) = 0 \qquad (1)$$

Dérivant successivement par rapport à x puis par rapport à y il vient les deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\,\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

En posant

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Si entre les 3 équations (1) (2) (3) j'élimine les paramètres α et β j'obtiendrai une équation différentielle de la forme

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (4)$$

Il est d'ailleurs évident que la relation (4) est unique ; en effet supposons que par un procédé quelconque on puisse établir entre x, y, z, p et q une autre relation de même forme, on pourrait éliminer par exemple q entre ces deux équations et arriver à une relation de la forme

$$f(x, y, z, p) = 0 \quad (5)$$

Ce serait donc dire que x, y, z, p, ne sont pas indépendants, or cela n'est pas exact ~~parce que donner ces 4 quantités ce n'est donner que 2 relations entre α et β auxquelles on peut satisfaire toujours puisque α et β sont indépendants, les 4 quantités x, y, z, p sont donc indépendantes et il n'existe pas d'équation telle que (5)~~.

l'éq. (1) résolue
…p. à β, s'écrit
(x, y, z, α). En la
…ntiant par rapp.
on trouve pour
p. la relation
…$z, \alpha) + p \frac{\partial \varphi(\ )}{\partial z} = 0$
…est pas indép^{te} de α
… que si on donne
… alors p n'est pas
…ine ce qui est
…re à l'équat (5)

Donc à toute équation telle que (1) correspond une équation différentielle et une seule ; si on suppose au contraire donnée l'équation différentielle, il y a une infinité d'équations primitives ; d'une forme beaucoup plus générale que la proposée, répondant à l'équation différentielle donnée.

Problème inverse. — Supposons que l'on donne une équation différentielle, déduite comme précédemment d'une équation à 3 variables contenant deux constantes arbitraires et proposons-nous de trouver toutes les surfaces répondant à cette équation différentielle. — Il y a d'abord la famille des surfaces représentées par l'équation donnée, il y a ensuite, tout comme dans le cas des équations à deux variables, la surface enveloppe des surfaces données, mais il y a encore une classe de surfaces infiniment plus générale : c'est l'ensemble des enveloppes des familles de surfaces à un paramètre variable que l'on obtient en liant les deux constantes arbitraires par une relation quelconque : à chaque détermination de cette relation arbitraire correspond une de ces surfaces elles sont bien plus générales que celles dont on est parti.

Il est d'ailleurs bien évident que les surfaces que nous venons de définir répondent à l'équation différentielle donnée, car tout point d'une telle surface est point de contact de celle-ci avec une des proposées et par conséquent la direction du plan tangent à l'enveloppe satisfait à l'équation différentielle, tout comme celle du plan tangent à l'enveloppée.

Premier exemple Soit l'équation $z = ax + by$

$\frac{\partial z}{\partial x} = a \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b$ l'équation différentielle est donc

$$z = px + qy$$

ou

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

Cette équation différentielle est vérifiée par toute fonction homogène du premier degré de la forme $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ φ étant une fonction quelconque.

Il y a donc une infinité de solutions singulières

Si nous établissons une relation quelconque entre a et b le plan enveloppe un cône. Ce cône doit être représenté par une équation satisfaisant à l'équation différentielle; or en un des points, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sont les mêmes que pour le plan enveloppant, comme pour le plan ils satisfont à l'équation différentielle, le cône y satisfait également.

Deuxième exemple

$$\text{Soit } z = (x+a)(y+b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = y+b \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q = x+a$$

L'équation différentielle cherchée $z = pq$

Il existe un nombre infini de relations vérifiant l'égalité $z = pq$. En effet $z = (x+a)(y+b)$ représente un nombre doublement infini de paraboloïdes hyperboliques.

Si je lie b à a par la relation $b = \varphi(a)$ j'ai une série de paraboloïdes représentés par (1) $z = (x+a)[y+\varphi(a)]$. Leur enveloppe sera comme précédemment solution de l'équation différentielle $z = pq$. Elle s'obtient éliminant a entre (1) et

$$0 = y + \varphi(a) + (x+a)\varphi'(a)$$

Si je prends par exemple $b = a$

$$z = (x+a)(y+a)$$

$$0 = x + a + y + a$$

d'où $a = -\frac{x+y}{2}$

l'enveloppe est donc le cylindre parabolique

$$z = -\frac{(x-y)^2}{4}$$

— Soit $b = \frac{1}{a}$

$$z = (x+a)\left(y+\frac{1}{a}\right)$$

$$0 = y + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x+a) = y - \frac{x}{a^2}$$

$$\text{d'où} \qquad a = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

l'équation de l'enveloppe est donc

$$z = \left(x + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)\left(y + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

$$\text{ou } z = xy + 2\sqrt{xy} + 1$$

Troisième exemple

Soit (1) $z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\begin{array}{c|l} x & p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \\ y & q = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

(2) $px + qy = z$

On ne peut pas dire que l'équation (2) soit l'équation différentielle de (1) car nous avions deux quantités

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ et } \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

à éliminer entre 3 équations ce qui peut se faire d'une infinité de manières

Quatrième exemple

$$ax + by + cz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$a + cp = (2x + 2pz)\,\varphi'$$

$$b + cq = (2y + 2qz)\,\varphi'$$

Divisant membre à membre j'ai une équation différentielle

$$(a + cp)(y + qz) = (b + cq)(x + pz)$$

$$ay - bx + p(cy - bz) + q(az - cx) = 0$$

Cinquième exemple

$$x + y + z = \varphi(x \times y \times z)$$

$$1 + p = (yz + pxy)\,\varphi'$$

$$1 + q = (xz + qxy)\,\varphi'$$

d'où on peut tirer une équation différentielle

$$(1+p)(xz + qxy) = (1+q)(yz + pxy)$$

ou

$$px(z-y) + qy(x-z) + z(x-y) = 0$$

6ème Leçon

Dérivées et différentielles d'ordres supérieurs au premier.

Fonction d'une seule variable. — Considérons une fonction y de la variable x définie par l'équation

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

On en déduit en différentiant une fois

$$dy = \varphi'(x)\,dx \qquad (2)$$

La différentielle dy est donc un produit de deux facteurs qui sont variables avec x ; mais x étant la variable indépendante je puis toujours faire la convention de prendre dx constant quel que soit x ; différentiant l'équation (2) il vient

$$d^2y = \varphi''(x)\,dx^2 \qquad (3)$$

d'où l'on déduit l'expression de la dérivée seconde

$$\varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Différentiant l'équation (3) il vient

$$d^3y = \varphi'''(x)\,dx^3$$

ou $\varphi'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$

et ainsi de suite ; on a évidemment, en général

$$\varphi^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Supposons que l'on considère simultanément plusieurs fonctions de la même variable x, soit par exemple :

$$y = f(x)$$
$$z = \varphi(x)$$

La quantité y est fonction de z, et admet par rapport à z des dérivées successives $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$, $\frac{d^3y}{dz^3}$ ..... etc

Il faut bien observer que si l'on considère les deux dérivées secondes $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2y}{dz^2}$, les numérateurs de ces expressions n'ont pas la même signification ; la première expression est obtenue en supposant dx constant et la deuxième en supposant dz constant ; or comme on a $dz = \varphi'(x)\,dx$ ces deux différentielles ne sont pas constantes en même temps.

Ce fait peut être mis en évidence par l'exemple suivant : soit

$$y = x^4$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$$

Je pose
$$z = x^2$$
On a alors
$$y = z^2$$
$$\frac{dy}{dz} = 2z$$
$$\frac{d^2y}{dz^2} = 2$$

Si les expressions d^2y qui figurent aux numérateurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ et de $\frac{d^2y}{dz^2}$ avaient la même signification, on déduirait de là

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{1}{6x^2}$$

Or $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2x}$ et par suite $\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{1}{4x^2}$

Formule du changement de variables. — Dans un assez grand nombre de cas il y a avantage à ne pas supposer la différentielle dx constante ; c'est lorsque l'on ne veut pas fixer quelle est la variable indépendante, ou lorsqu'on veut changer de variable indépendante.

Soit $y = \varphi(x)$

différentiant il vient

$$dy = \varphi'(x)\, dx$$

Différentiant une deuxième fois il vient

$$d^2 y = \varphi''(x)\, dx^2 + \varphi'(x)\, d^2 x$$

D'où l'on tire

$$\varphi''(x) = \frac{d^2y - \varphi'(x)\, d^2x}{dx^2}$$

Si je remplace maintenant $\varphi'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$\varphi''(x) = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$$

Cette formule permet de prendre telle variable indépendante que l'on veut : il suffit d'annuler sa différentielle seconde.

Considérons en effet l'égalité

$$\varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$$

Si j'annule d^2y il reste

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-dy\, d^2x}{dx^3} = \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

On a ainsi une équation qui fait connaître la dérivée seconde de x par rapport à y en fonction de celle de y par rapport à x et inversement

Exemple soit

$$y = e^x$$

on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

Mais on a d'autre part

$$x = Ly$$

d'où

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-1}{y^2}$$

On doit donc avoir

$$e^x = \frac{\frac{1}{y^2}}{\left(\frac{1}{y}\right)^3} = y$$

ce qui est bien réalisé

On peut démontrer directement la formule précédente.

Soit $y = f(x)$

dérivant par rapport à y il vient

$$1 = f'(x)\,\frac{dx}{dy}$$

dérivant encore une fois par rapport à y, il vient

$$0 = f''(x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + f'(x)\,\frac{d^2x}{dy^2}$$

d'où $$f''(x) = \frac{-f'(x)\,\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

Or $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

on a donc $$f''(x) = \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

C. Q. F. D.

Application. Considérons la fonction

$$y = \sin m\,(\text{arc}\,\sin x)$$

Dérivant il vient

$$\frac{dy}{dx} = \cos m\,(\text{arc}\,\sin x)\,\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dérivant une deuxième fois il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin m\,(\text{arc}\,\sin x)\,\frac{m^2}{1-x^2} + \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos m\,(\text{arc}\,\sin x)$$

ou $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = -m^2\sin m\,(\text{arc}\,\sin x) + x\,\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos m\,(\text{arc}\,\sin x)$$

Introduisant dans cette expression, les quantités y et $\frac{dy}{dx}$, il reste la relation différentielle

$$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x\,dy}{dx} + m^2 y = 0 \qquad (1)$$

C'est une des équations différentielles de l'équation donnée.

Je prends pour nouvelle variable indépendante la quantité u définie par l'équation

$$x = \sin u \quad (2)$$

Je vais calculer les quantités $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de $\frac{dy}{du}$ et $\frac{d^2y}{du^2}$
De l'équation (2) je déduis

$$dx = \cos u \, du$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{1}{\cos u} \qquad (3)$$

Dérivant encore une fois il vient (en remarquant que u étant variable indépendante on a $d^2u = 0$)

$$d^2x = -\sin u \, du^2$$

Ceci posé je considère la formule

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$$

et j'y remplace dx et d^2x par leurs valeurs il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos u \, du \, d^2y + dy \sin u \, du^2}{\cos^3 u \, du^3} \qquad (4)$$

Portant les valeurs données par les équations (3) et (4) dans l'équation (1) il vient

$$(1-x^2)\left[\frac{\cos u \, du \, d^2y + \sin u \, dy \, du^2}{\cos^3 u \, du}\right] - x\frac{dy}{du}\frac{1}{\cos u} + m^2 y = 0$$

Je remplace enfin x en fonction de u, il vient toutes réductions faites

$$\frac{d^2y}{du^2} + m^2 y = 0$$

Cette équation s'obtient immédiatement en remarquant que

$$y = \sin m u$$

Dérivant il vient

$$\frac{dy}{du} = m \cos m u$$

Dérivant une deuxième fois il vient

$$\frac{d^2y}{du^2} = -m^2 \sin m u = -m^2 y$$

Cas où la fonction dépend de deux variables

Considérons la fonction de deux variables $z = \varphi(x, y)$ et posons comme d'habitude

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

Si je prends la dérivée de p par rapport à x en considérant y comme constant et je représente cette dérivée par le

symbole $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ou plus simplement par r. Je prends de même la dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$ de q par rapport à y

Je puis aussi prendre la dérivée de p par rapport à y et la dérivée de q par rapport à x. Je dis que ces deux dérivées sont égales c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

En effet je puis écrire

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} + \eta$$

η tendant vers 0 avec h. Je prends maintenant les dérivées des deux membres de (1) par rapport à y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)-\varphi(x+h,y)+\varphi(x,y)}{hk} + \eta' + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

η' s'annulant avec k. Mais η s'annule avec h quel que soit y ; donc ~~η est indépendant~~ de y ~~et~~ $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ est nul ; il reste donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)-\varphi(x+h-y)+\varphi(x\ y)}{hk}$$

Nous aurions trouvé de même

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y+k)+\varphi(x,y)}{kh}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

et nous représenterons l'une ou l'autre de ces dérivées par la lettre s.

Étant donnée une fonction z de x et de y on sait que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

ou :

$$dz = p.\,dx + q.\,dy$$

En différentiant cette équation, on obtiendra l'expression de la différentielle seconde d^2z. Dans cette différentiation, on considère généralement dx et dy comme constants, ce qui revient à prendre x et y pour variables indépendantes. — Il vient ainsi :

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} dx . dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} . dy^2$$

ou si l'on pose :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y} = s , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

$$d^2z = r . dx^2 + 2s . dx . dy + t . dy^2 .$$

Formule du changement de variables. — Dans ce qui précède, nous avons supposé x et y variables indépendantes, hypothèse qui a entraîné d^2x et d^2y nuls. Si nous ne faisions aucun choix de variables indépendantes, en dérivant les deux membres de l'égalité :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} . dx + \frac{\partial z}{\partial y} . dy$$

nous obtiendrons une autre formule faisant connaître d^2z en fonction des dérivées premières et secondes de la fonction par rapport à x et à y et cela quelle que soit la variable indépendante. Cette formule est :

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} . dx . dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y$$

ou, si l'on adopte les mêmes notations que précédemment :

$$d^2z = r dx^2 + 2s dx . dy . + t dy^2 + p d^2x + q d^2y .$$

C'est cette formule dont on devra faire usage dans tous les problèmes relatifs au changement de variables.

Problème. — Soit une fonction z des deux variables x et y

$$z = \varphi (x, y)$$

Je suppose que l'on résolve cette équation par rapport à y, il vient

$$y = F (x, z)$$

Ceci posé je suppose que l'on connaisse les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et y que je désigne comme précédemment par p, q, r, s, t, et je me propose de calculer celles de y par rapport à x et à z.

De la formule précédente je déduis :

$$d^2y = -\frac{r}{q}\,dx^2 - 2\,\frac{s}{q}\,dx\,dy - \frac{t}{q}\,dy^2 - \frac{p}{q}\,d^2x + \frac{1}{q}\,d^2z$$

Calculant dy en fonction de dz et dx, il vient

$$dy = \frac{dz - p\,dx}{q}$$

En remplaçant dy par cette valeur dans l'expression précédente il vient

$$d^2y = dx^2\left[-\frac{r}{q} + 2\frac{ps}{q^2} - \frac{p^2t}{q^3}\right] + 2\,dx\,dz\left[\frac{pt}{q^3} - \frac{s}{q^2}\right] + dz^2\left[\frac{-t}{q^3}\right] - \frac{p}{q}\,d^2x + \frac{1}{q}\,d^2z$$

Mais d'après la formule précédemment démontrée on a

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\,dx\,dz + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\,dz^2 + \frac{\partial y}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial y}{\partial z}\,d^2z$$

Identifiant les deux expressions de d^2y il vient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-p}{q}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2ps}{q^2} - \frac{r}{q} - \frac{p^2t}{q^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = \frac{pt}{q^3} - \frac{s}{q^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z^2} = \frac{-t}{q^3}$$

Ce calcul donne en même temps les cinq dérivées cherchées, s'il ne s'agit que d'en trouver une en particulier, il est plus simple de raisonner ainsi :

Si je considère l'équation

$$z = \varphi(x, y)$$

on en déduit par hypothèse

$$y = F(x, z)$$

Si donc je remplace y par cette valeur j'obtiens une expression identique à z ; la différence $z - \varphi(x, y)$ devient identiquement nulle, il en sera de même de ses dérivées.

Soit à calculer $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, je prends la dérivée de $z - \varphi(x, y) = 0$ par rapport à x il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Or φ c'est précisément z ; on a donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

d'où $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{p}{q}$

Dérivant une deuxième fois par rapport à x il vient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad (2)$$

Résolvant cette équation par rapport à $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, remplaçant la quantité $\frac{\partial y}{\partial x}$ par sa valeur tirée de l'équation (1) il vient l'expression cherchée

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\,\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\;\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} - \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3}$$

ou en introduisant les quantités, p, q, r, s, t

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2ps}{q^2} - \frac{r}{q} - \frac{p^2 t}{q^3}$$

7ème Leçon

Applications

Problème : <u>trouver l'équation différentielle commune aux surfaces réglées admettant le plan des (x, y) comme plan directeur.</u>

Soit

$$z = \alpha$$
$$y = xF(\alpha) + f(\alpha)$$

les équations d'une génératrice

La surface a pour équation

1ère méthode

$$y = xF(z) + f(z)$$

Différentiant en faisant z constant il vient

$$dy = F(z)\,dx \qquad (1)$$

Mais on a toujours

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

(Pour avoir l'éq. différ^{le}, il faut éliminer les 2 fonct. arbitraires F et f. On prendra donc dérivées par rapp. à x et y, mais on aura 4 éq. à éliminer, F, f, F', f' et seulement 3 éq. Il faut donc prendre les dérivées du 2nd ordre : on a 6 éq. et 6 [illegible] à éliminer. Il se trouve que c'est pour et C'est la 2ème méthode)

Donc $$p\,dx + q\,dy = 0$$

D'où $$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{-p}$$

L'équation (1) devient, en remplaçant dy et dx par les quantités proportionnelles $-p$ et q,

$$-p = F(z)\, q$$

Différentiant de nouveau il vient

$$F(z)\left[s\,dx + t\,dy\right] + \left[r\,dx + s\,dy\right] = 0$$

Remplaçons $F(z)$ par sa valeur $-\frac{p}{q}$, et dx et dy par les quantités proportionnelles q et $-p$ il vient

$$r\,q^2 - 2s\,pq + t\,p^2 = 0$$

<u>Autre méthode</u>. Je différentie l'équation

$$y = x\,F(z) + f(z)$$

d'abord en considérant x comme constant

$$dy = x\,F'(z)\,dz + f'(z)\,dz$$

ou (1) $$1 = x\,F'(z)\,q + f'(z)\,q$$

puis y comme constant

$$0 = dx\,F(z) + x\,F'(z)\,dz + f'(z)\,dz$$

ou (2) $$0 = F(z) + x\,F'(z)\,p + f'(z)\,p$$

Je multiplie (1) par p (2) par $-q$ et j'ajoute

(3) $$p + q\,F(z) = 0$$

Je prends la dérivée en considérant d'abord x puis y comme constants

$$\begin{array}{ll} p & s + q^2F'(z) + t\,F(z) = 0 \\ q & r + pq\,F'(z) + s\,F(z) = 0 \\ \hline & (sp - qr) + (tp - sq)\,F(z) = 0 \end{array}$$

et en remplaçant $F(z)$ par $-\frac{p}{q}$

$$q(sp - qr) - p(tp - sq) = 0$$

$$r\,q^2 - 2s\,pq + t\,p^2 = 0$$

Problème inverse. — Pour chercher la surface satisfaisant à cette équation différentielle je prendrai comme fonction y et comme variables indépendantes x et z

$$d^2z = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y$$

j'en déduis la valeur de d^2y elle contient dy on a

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

On en tire

$$dy = \frac{\partial z - p\,\partial x}{q}$$

remplaçant dy par cette valeur il vient

$$d^2y = -\frac{r}{q}\,dx^2 - 2\,s\,dx\,\frac{\partial z - p\partial x}{q} - \frac{t}{q}\left(\frac{\partial z - p\partial x}{q^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{q} - p\,d^2x$$

Cette valeur de d^2y doit être identique à la valeur

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx^2 + 2.\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dz + 2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\,dz^2 + \frac{\partial y}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial y}{\partial z}\,d^2z$$

Identifions les coefficients de deux expressions de d^2y, on obtient les expressions des dérivées de y par rapport à x et z. il vient en particulier

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{q} + 2\,\frac{sp}{q} - \frac{tp^2}{q^3} = -\frac{1}{q^3}\left[rq^2 - 2spq + tp^2\right]$$

Les deux quantités $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $(rq^2 - 2sp + tp^2)$ sont donc nulles en même temps et l'équation différentielle proposée équivaut à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Il s'en suit immédiatement que l'on a

$$y = Ax + B$$

A et B étant deux fonctions quelconques de z

Ce qui prouve que l'équation différentielle trouvée caractérise les surfaces réglées ayant pour plan directeur le plan des xy.

La méthode par laquelle nous avons transformé l'équation différentielle n'est pas générale, elle est identique par ce fait que l'on prévoit le résultat

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

il suffit donc de calculer cette expression. —

La méthode générale aurait consisté à calculer r, s, t en fonction de

$$\frac{\partial y}{\partial x} \quad \frac{\partial y}{\partial z} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

et à porter ces valeurs dans l'équation différentielle donnée

Le calcul de ces quantités se serait d'ailleurs fait en partant de l'expression de $d^2 z$ en fonction des quantités supposées connues (laquelle s'obtient en résolvant l'égalité

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} dx dz + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial y}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial y}{\partial z} d^2 z$$

et y remplaçant dz par sa valeur en fonction de dy et dx) et en identifiant l'expression ainsi obtenue à l'expression connue

$$d^2 z = r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2 + p d^2 x + q d^2 y$$

Problème : Considérons une surface engendrée par une droite qui rencontre l'axe des Z. Les équations de la génératrice sont de la forme

$$y = \alpha x$$
$$z = \beta x + \gamma$$

Pour que cette droite engendre une surface il faut et suffit que les équations de cette génératrice dépendent d'un seul paramètre variable, on peut toujours considérer α comme le paramètre indépendant, β et γ sont alors deux fonctions quelconques $F(\alpha)$ et $f(\alpha)$ de cette variable.

On obtient l'équation de la surface en éliminant α entre les deux équations, c'est

$$z = x F\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Elle contient deux fonctions arbitraires, on obtiendra une équation différentielle convenant à toutes les surfaces considérées en prenant les dérivées successives et éliminant les fonctions F et f et leurs dérivées entre les équations obtenues.

Dérivant par rapport à x et à y il vient :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F\left(\frac{y}{x}\right) + x F'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) + f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x F'\left(\frac{y}{x}\right) + f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

les fonctions F' et f' s'éliminent immédiatement entre les deux

équations et il vient

$$F\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Dérivant cette équation par rapport à x puis par rapport à y il vient

$$-\frac{y}{x^2}F'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Eliminant $F'\left(\frac{y}{x}\right)$ entre ces deux équations, on obtient l'équation différentielle cherchée

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

que l'on peut encore écrire en adoptant la même notation que précédemment:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

On arrive plus vite au même résultat en différentiant l'équation donnée. Comme x et y sont variables indépendantes la différentielle de z n'est pas déterminée. Je puis donc lier dx et dy par une relation arbitraire. Pour la simplicité des calculs nous supposerons que le rapport $\frac{y}{x}$ reste constant, c. à. d. que l'on a

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0 \text{ ou encore } \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Dans cette hypothèse on a

$$dz = F\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

Mais on a toujours

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

On a donc

$$p\,dx + q\,dy = F\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

ou, remplaçant dx et dy par des quantités proportionnelles,

$$px + qy = xF\left(\frac{y}{x}\right)$$

Nous avons ainsi éliminé $f\left(\frac{y}{x}\right)$; différentiant une deuxième fois dans la même hypothèse il vient

$$p\,dx + q\,dy + x\,dp + y\,dq = F\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

Or $p\,dx + q\,dy = F\left(\frac{y}{x}\right) dx$ il reste donc

$$x\,dp + y\,dq = 0$$

ou $$x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy = 0$$

Remplaçant enfin dx, dy par les quantités proportionnelles x et y il reste la relation

$$r x^2 + 2\,s x y + t y^2 = 0$$

Il est aisé de voir que le calcul que nous venons de faire est au fond identique au précédent bien qu'exposé de manière différente.

En effet pour éliminer la fonction $f\left(\frac{y}{x}\right)$ nous avons dans les deux cas formé l'expression

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

Problème inverse. Etant donnée l'équation différentielle proposons-nous de trouver les surfaces auxquelles elle satisfait.

Pour résoudre ce problème je prends comme nouvelles variables x et $\frac{y}{x}$ que je désigne par u et je vais calculer la nouvelle équation différentielle.

Pour cela je pars de l'expression de d^2z en fonction des différentielles de x et de u en posant

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p',\ \frac{\partial z}{\partial u} = q',\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r',\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = s',\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = t'$$

on a

$$d^2z = r'\,dx^2 + 2\,s'\,dx\,du + t'\,du^2 + p'\,d^2x + q'\,d^2u$$

Dans cette expression remplaçons les différentielles de u en fonction de celles de x et de y on a

$$u = \frac{y}{x}$$

$$du = \frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2}\,dx$$

$$d^2u = \frac{d^2y}{x} - \frac{+y}{x^2}\,d^2x - 2\cdot\frac{dx\,dy}{x^2} + 2\,dx^2\,\frac{y}{x^3}$$

Effectuons la substitution il vient

$$d^2z = dx^2\left[r' - 2s'\,\frac{y}{x^2} + t'\,\frac{y^2}{x^4} + 2q'\,\frac{y}{x^3}\right] + 2dx\,dy\left[\frac{s'}{x} - \frac{t'y}{x^3} - \frac{q'}{x}\right]$$
$$+\ dy^2\left[\frac{t'}{x^2}\right] + d^2x\left(p' - q'\,\frac{y}{x^2}\right) + q'\,d^2y$$

Cette valeur de d^2z en fonction des différentielles de x et de y doit être identique à

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,dx + q\,dy$$

On a donc

$$r = r' - 2s'\frac{y}{x^2} + t'\frac{y^2}{x^4} + 2q'\frac{y}{x^2}$$

$$s = \frac{s'}{x} - \frac{-t'y}{x^3} - \frac{-q'}{x}$$

$$t = \frac{t'}{x^2}$$

La nouvelle équation différentielle s'obtient alors immédiatement, c'est toutes réductions faites

$$r'x^2 = 0$$

elle se réduit donc à

$$r' = 0$$

On a donc

$$z = Ax + B$$

Mais A et B sont des fonctions quelconques de u, c.à.d. de $\frac{y}{x}$, la fonction z est donc de la forme

$$z = xF\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

c'est bien la forme dont nous sommes partis.

L'équation donnée est donc caractéristique des surfaces réglées dont les génératrices s'appuient sur l'axe des z.

Le résultat $r' = 0$ auquel on est parvenu pouvait s'obtenir immédiatement en calculant $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$

On a

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y$$

Or

$$y = ux$$

$$dy = x\,du + u\,dx$$

$$d^2y = 2\,du\,dx + u\,d^2x$$ (on suppose ici que u est variable indépendante).

Substituons ces valeurs de dy et d^2y dans l'équation précédente, il vient l'expression de d^2z en fonction de x et de u, et le coefficient de dx^2 est la quantité cherchée r'. On a ainsi

$$r' = r + 2s.\frac{y}{x} + t.\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(rx^2 + 2sxy + ty^2\right)$$

Or par hypothèse on a
$$r x^2 + 2 s x y + t y^2 = 0$$
cette équation est donc équivalente à $\quad r = 0.$

Problème : Soit donnée l'équation différentielle suivante qui se présente dans un certain nombre de problèmes de physique
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
On se propose de chercher la forme générale de la fonction z.
Pour cela je prends deux nouvelles variables α et β.
$$\alpha = y + a x$$
$$\beta = y - a x$$
et je calcule les dérivées secondes de z par rapport à x et à y en fonction des dérivées prises par rapport à α et β.

On peut effectuer directement ce calcul au moyen du théorème des fonctions composées
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \frac{2\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right]$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha} + \frac{2\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$$
L'équation différentielle proposée se réduit après la transformation à $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$

Si donc je considère la fonction $\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}$, elle est indépendante de β ; l'on a
$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = F(\alpha)$$
d'où l'on déduit
$$z = \varphi_1(\alpha) + C_1$$
C_1 étant une constante par rapport à α, donc une fonction de β ; ~~cette fonction contient une constante arbitraire, par conséquent on peut remplacer~~ ; $F(\alpha)$ ~~par~~ est une fonction absolument quelconque de α. Donc la fonction z est de la forme

$$z = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta)$$

ou en revenant aux variables primitives :

$$z = \varphi_1(y + ax) + \varphi_2(y - ax)$$

φ_1 et φ_2 étant deux fonctions absolument quelconques.

—— Soit une fonction de x et de y $z = \varphi(x, y)$, proposons nous de chercher ce que devient l'expression $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en faisant le changement de variables

$$x = \rho \cos \omega$$
$$y = \rho \sin \omega$$

Nous avons

(1) $$d^2 z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y$$

et d'autre part en considérant z comme fonction de ρ et de ω

(2) $$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} d\rho^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega} d\rho\, d\omega + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} d\omega^2 + \frac{\partial z}{\partial \rho} d^2\rho + \frac{\partial z}{\partial \omega} d^2\omega$$

Différentions maintenant les équations

$$x = \rho \operatorname{Cos} \omega$$
$$y = \rho \operatorname{Sin} \omega$$

on en déduit

$$dx = d\rho \operatorname{Cos}\omega - \rho \operatorname{Sin}\omega\, d\omega$$
$$dy = d\rho \operatorname{Sin}\omega + \rho \operatorname{Cos}\omega\, d\omega$$
$$d^2x = d^2\rho \operatorname{Cos}\omega - 2\,d\rho\, d\omega \operatorname{Sin}\omega - \rho \operatorname{Cos}\omega\, d\omega^2 - \rho \operatorname{Sin}\omega\, d^2\omega$$
$$d^2y = d^2\rho \operatorname{Sin}\omega + 2\,d\rho\, d\omega \operatorname{Cos}\omega - \rho \operatorname{Sin}\omega\, d\omega^2 - \rho \operatorname{Cos}\omega\, d^2\omega$$

Substituant dans (1) il vient

$$d^2 z = d\rho^2\left[r \operatorname{Cos}^2\omega + 2s \operatorname{Cos}\omega \operatorname{Sin}\omega + t \operatorname{Sin}^2\omega\right] + 2\,d\rho\, d\omega\left[-r\rho \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}\omega + \right.$$
$$\left. + s\rho(\operatorname{Cos}^2\omega - \operatorname{Sin}^2\omega) + t\rho \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}\omega - p \operatorname{Sin}\omega + q \operatorname{Cos}\omega\right] +$$
$$+ d\omega^2\left[r\rho^2 \operatorname{Sin}^2\omega - 2s\rho^2 \operatorname{Sin}\omega \operatorname{Cos}\omega + t\rho^2 \operatorname{Cos}^2\omega - p\rho \operatorname{Cos}\omega - q\rho \operatorname{Sin}\omega\right] + d^2\rho\left[p \operatorname{Cos}\omega + q \operatorname{Sin}\omega\right] +$$
$$+ \rho\, d^2\omega\left[-p \operatorname{Sin}\omega - q \operatorname{Cos}\omega\right]$$

Identifiant cette expression à l'expression (2) il vient

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = p \operatorname{Cos}\omega + q \operatorname{Sin}\omega$$
$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = -\rho\left[p \operatorname{Sin}\omega - q \operatorname{Cos}\omega\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = r \cos^2\omega + 2s \sin\omega \cos\omega + t \sin^2\omega$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega\partial\rho} = -r\rho \sin\omega\cos\omega + s\rho(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + t\rho \sin\omega\cos\omega - p\sin\omega + q\cos\omega$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2} = r\rho^2 \sin^2\omega - 2s\rho^2 \sin\omega\cos\omega + t\rho^2\cos^2\omega - p\rho\cos\omega - q\rho\sin\omega.$$

De ces formules on déduit une relation remarquable

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2} = r + t - \frac{p\cos\omega + q\sin\omega}{\rho}$$

Or on a $\frac{\partial z}{\partial\rho} = p\cos\omega + q\sin\omega$

Il reste donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Autre méthode. — Nous avons trouvé simultanément les 5 dérivées cherchées.

S'il ne s'agissait d'en trouver qu'une, il serait plus simple de la calculer directement en se servant du théorème des fonctions composées.

On a en effet

$$z = F(x,y)$$
$$x = \rho\cos\omega$$
$$y = \rho\sin\omega$$

La fonction z est alors fonction composée de ρ et de ω

Soit à calculer par exemple $\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}$

On a $\frac{\partial z}{\partial\omega} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(-\rho\sin\omega\right) + \frac{\partial z}{\partial y}(\rho\cos\omega)$

dérivant cette nouvelle fonction composée, il vient.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[\rho^2\sin^2\omega\right] - \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\rho^2\sin\omega\cos\omega) - \frac{\partial z}{\partial x}(\rho\cos\omega) + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-\rho^2\sin\omega\cos\omega)$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\rho^2\cos^2\omega + \frac{\partial z}{\partial y}(-\rho\sin\omega)$$

ou $\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2} = r\rho^2\sin^2\omega - 2s\rho^2\sin\omega\cos\omega + t\rho^2\cos^2\omega - p\rho\cos\omega - q\rho\sin\omega$

8ème Leçon

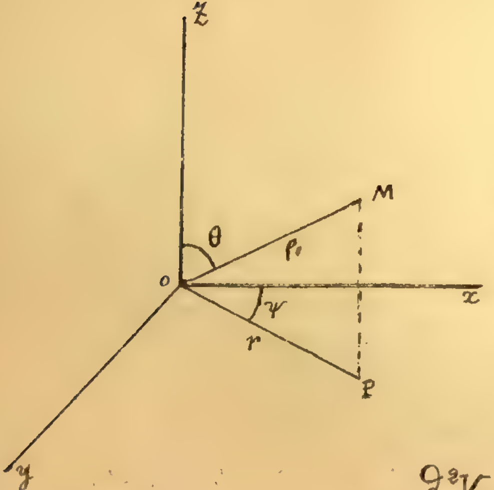
Dérivées et différentielles d'ordre supérieur (suite)

Soit maintenant une fonction à trois variables $V = \varphi(x, y, z)$ considérons l'expression

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

qu'on appelle paramètre différentiel de la fonction V et proposons nous de prendre comme variables indépendantes les variables ρ, θ et ψ définies par les équations

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\psi$$
$$z = \rho \cos\theta$$



Considérons d'abord $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$. Dans ces dérivées nous avons considéré z comme constant.

L'expression $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ est donc identique à l'expression analogue pour une section de la surface par un plan parallèle au plan des (x, y) on a donc

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

J'isole dans le second membre le groupe $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Dans la première dérivée ψ et θ sont constants dans la seconde x et y sont constants et par suite ψ.

Ainsi dans $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ψ est toujours supposé constant.

Nous nous déplaçons donc dans le plan ZOP. Or dans ce plan r et z sont deux coordonnées rectangulaires et ρ et θ sont les coordonnées polaires, on peut donc écrire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

donc
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

Je calcule maintenant $\frac{\partial V}{\partial r}$ en fonction de $\rho, \theta\, \psi$; r étant uniquement fonction de ρ et de θ on a

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial r}$$

Mais

$$\rho^2 = r^2 + z^2$$

$$tg\,\theta = \frac{r}{z}$$

et comme dans $\frac{\partial V}{\partial r}$, z avait été supposé constant en même temps que ψ, on a

$$\rho\, \partial \rho = r\, \partial r$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{r}{\rho}$$

et

$$\frac{\partial \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\partial r}{z} = \frac{\partial r}{\rho \cos \theta}$$

Je remplace r par $\rho \sin \theta$ et j'ai

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} \cot g\, \theta$$

Nous avons par suite l'expression transformée du paramètre différentiel

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} \cot g\, \theta$$

<u>Autre application</u>. Soit une fonction de $x + a y$

$$z = \varphi(x + a y)$$

on a

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Faisons dans cette égalité $a = i$. La fonction $z = \varphi(x+yi)$ satisfait à la relation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Cette remarque constitue un théorème énoncé par Cauchy. Mais trente ans après l'avoir découvert il remarqua que le théorème ne signifiait rien en général, car on n'avait jamais défini une fonction de $x+yi$. Il était donc nécessaire de définir ce qu'on entend par fonction d'une variable imaginaire.

La définition qui se présente naturellement à l'esprit est la suivante:

On appelle fonction d'une variable imaginaire, $z = x + yi$, une expression imaginaire de la forme $P + Qi$ qui varie en même temps que z et dont les valeurs se trouvent définies lorsque z est donnée (c. à. d. lorsque x et y sont donnés). Il en résulte immédiatement que la partie réelle P et la partie imaginaire Q sont des fonctions de x et de y.

Cette définition n'est pas complète, car une fonction ainsi définie n'aurait pas de dérivée : en effet, la dérivée est par définition la limite du rapport $\frac{d(P+Qi)}{d(x+yi)}$

Or $$d(P+Qi) = dP + i\,dQ = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)$$

Le rapport considéré s'écrit donc encore

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\Big) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)}{dx + i\,dy} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\,\frac{dy}{dx}}$$

Ce rapport dépend donc dans le cas général du rapport $\frac{dy}{dx}$; la fonction n'a donc pas de dérivée définie lorsque $x+yi$ tend vers 0.

Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut évidemment que l'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i}$$

Nous imposerons cette condition aux deux expressions P et Q pour définir la fonction $P+Qi$

Cette équation de condition s'écrit encore

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} - i\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0$$

ce qui exige séparément

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP}{dy}$$

De ces deux équations de condition, on peut en déduire aisément deux autres, telles que chacune ne contienne que l'une des deux fonctions. Pour cela je dérive la 1ère équation par rapport à x, la 2e par rapport à y ; j'ajoute et il vient

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} = 0$$

on obtient de même l'équation différentielle

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} = 0$$

On peut encore, des deux équations (1) et (2), déduire une relation remarquable. — Il suffit pour cela de les multiplier membre à membre. — Il vient ainsi

$$(3) \qquad \frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

Cette relation exprime que les deux courbes représentées par les équations

$$P = K$$
$$Q = K'$$

sont orthogonales. En effet les coëfficients angulaires des normales à ces courbes sont respectivement

$$-\frac{\dfrac{\partial P}{\partial x}}{\dfrac{\partial P}{\partial y}} \qquad \text{et} \; -\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}}$$

Donc, pour qu'une imaginaire de la forme $P + Qi$, dans laquelle P et Q sont des fonctions des variables x et y, soit une fonction de la variable imaginaire $x + yi$, il faut que les courbes que l'on obtient en égalant les fonctions P et Q à des constantes quelconques soient orthogonales.

— Réciproquement si l'on se donne sur un plan deux systèmes de courbes orthogonales peuvent-elles donner naissance à des fonctions

de $x + y i$

Soit $u = \alpha$, $v = \beta$ les deux systèmes de courbes il n'est pas nécessaire que la fonction de $x + yi$ soit $u + vi$ elle peut être $f(u) + iF(v)$. La condition pour qu'elle soit fonction de $x + yi$ est que

$$\begin{cases} f'(u) \dfrac{\partial u}{\partial x} = F'(v) \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ f'(u) \dfrac{\partial u}{\partial y} = -F'(v) \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Ces équations sont en général incompatibles, mais ici elles donnent pour $\dfrac{f'(u)}{F'(v)}$ la même valeur à cause de la condition d'orthogonalité de $u = \alpha$ $v = \beta$

On tire par exemple de la première

$$\frac{f'(u)}{F'(v)} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$$

Le deuxième membre est fonction de x et de y, il peut être exprimé en u et V les deux termes contenant en général u et V tandis que dans le premier le numérateur ne contient que u et le dénominateur que V c'est en général impossible.

Posons en effet

$$\frac{f'(u)}{F'(v)} = \psi(u, v)$$

$$L\psi(u, v) = Lf'(u) - LF'(v)$$

La seconde dérivée de la fonction $L\psi(u, V)$ prise une fois par rapport à u, une fois par rapport à V est donc nulle ce qui n'est en général pas vérifié. Donc en général, on n'a pas de fonct. corresp^t aux syst. de courbes.

Nous allons considérer un exemple où les deux séries de courbes donnent naissance à une fonction de $x + y i$.

Les courbes $u = \alpha$ sont des cercles concentriques et les courbes $v = \beta$ sont des droites passant par leur centre. La fonction cherchée (si elle existe) sera donc de la forme

$$f(x^2 + y^2) + iF\left(\frac{y}{x}\right)$$

La seule équation du problème est

$$2x f'(x^2 + y^2) = \frac{1}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{f'(x^2 + y^2)}{F'\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{2x^2}$$

je passe en coordonnées polaires je dois trouver des fonctions $\varphi(\rho)$ et $\psi(\omega)$ telles que

$$\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\omega)} = \frac{1}{2\rho^2 \cos^2\omega}$$

on prendra $\varphi(\rho) = \frac{1}{2\rho^2}$ $\psi(\omega) = \cos^2 \omega$

J'ai donc

$$f'(\rho^2) = \frac{1}{2\rho^2} \qquad f(\rho^2) = \frac{1}{2} L(\rho^2) = \frac{1}{2} L(x^2+y^2)$$

et

$$F'(tg\omega) = \cos^2\omega = \frac{1}{1+tg^2\omega} \qquad F(tg\omega) = \text{arctg}.\, tg\,\omega = \omega = \text{arctg}\, \frac{y}{x}$$

par conséquent la fonction cherchée sera:

$$P + Qi = \frac{1}{2} L(x^2+y^2) + i\ \text{arctg}\ \frac{y}{x}$$

on appelle généralement cette fonction, logarithme de $x + yi$ (par définition)

$$L(x+yi) = \frac{1}{2} L(x^2+y^2) + i\ \text{arctg}\ \frac{y}{x}$$

—— Si $u + vi = \varphi(x+yi)$ on a aussi $x + yi = F(u+vi)$

car si on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

on a aussi

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v}$$

on aura donc aussi

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$$

Je suppose une deuxième fonction de $x + yi$

$$\alpha + \beta i = \psi(x+yi)$$

$u + vi$ est évidemment fonction de $\alpha + \beta i$ et on doit avoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0$$

Vérifions, nous avons

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha\, d\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta} d\beta^2 + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d^2\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} d^2\beta$$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

J'identifie d^2u pris sous cette forme avec

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y$$, et ~~comme je veux calculer~~

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ je calcule seulement $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2}$ c.à.d. j'identifie les coeff. de dx^2 et de dy^2

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}$$

ajoutant, il vient

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right]\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right]$$

, après simplification faite

en s'appuyant sur les égalités

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0$$

On a donc bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0$$

puisque $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

et la vérification est faite

9ème Leçon

Théorème de Taylor. — Application aux fonctions circulaires. Développements en séries

---

Théorème de Taylor. — Le théorème de Taylor fait connaître le développement de l'accroissement d'une fonction suivant les puissances de l'accroissement de la variable.

La formule à laquelle il conduit est une généralisation de la formule qui existe dans le cas où la fonction considérée est un polynôme entier en x de degré n.

On a dans ce cas particulier

$$f(x_1+h)=f(x_1)+hf'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x_1)\dots\dots+\frac{h^n}{1.2\dots n}f^n(x_1).$$

Revenant au cas général je considère une fonction de la variable x ; je la suppose finie et continue lorsque la variable varie de x_1 à x_1+h, et je suppose de plus qu'elle admette, dans les mêmes conditions, $(n+1)$ dérivées successives finies et continues.

Je pose

$$f(x_1+h)=f(x_1)+hf'(x_1)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_1)\dots\dots+\frac{h^n}{1.2\dots n}f^n(x_1)+\frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}R$$

La quantité R est un nombre qui se trouve déterminé par cette égalité même, où il ne figure d'ailleurs aucune quantité variable.

Je pose $\quad x_1+h=z \quad$ d'où $\quad h=z-x_1$

L'égalité précédente devient

$$f(z)-f(x_1)-(z-x_1)f'(x_1)-\frac{(z-x_1)^2}{1.2}f''(x_1)\dots-\frac{(z-x_1)^n}{1.2\dots n}f^n(x_1)-\frac{(z-x_1)^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}R=0$$

Pour calculer R je considère la fonction auxiliaire de x

$$\varphi(x)=f(z)-f(x)-(z-x)f'(x)-\frac{(z-x)^2}{1.2}f''(x)\dots-\frac{(z-x)^n}{1.2\dots n}f^n(x)-\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}R$$

Cette fonction est évidemment continue lorsque x varie de x_1 à z puisque c'est la somme de fonctions continues ; elle s'annule lorsque l'on donne à x la valeur x_1 par suite de la définition de R, et aussi lorsque l'on donne à x la valeur z (cela est évident d'après la forme de la fonction), donc sa dérivée s'annule pour une certaine valeur de la variable comprise entre x_1 et z et qui est par suite de la forme $x_1+\theta(z-x_1)$ ou $x_1+\theta h$; θ étant un nombre compris entre 0 et 1. — Si je calcule cette dérivée je constate que tous les termes se détruisent deux à deux sauf les deux derniers (le terme général de la fonction est un produit de deux facteurs donnant deux termes dans la dérivée, et le premier d'entre ceux-ci est égal et de signe contraire au dernier de ceux fournis par le précédent terme de la fonction)

Il vient donc

$$\varphi'(x)=-\frac{(z-x)^n}{1.2\dots n}f^{n+1}(x)+\frac{R(z-x)^n}{1.2\dots n}=\frac{(z-x)^n}{1.2\dots n}\left[R-f^{n+1}(x)\right]$$

Exprimant que cette dérivée est nulle pour la valeur $(x_1+\theta h)$ de x

il vient
$$R = f^{(n+1)}(x_1 + \theta h)$$

On a donc la formule

$$f(x_1+h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_1) \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x_1) + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} f^{(n+1)}(x_1+\theta h)$$

Le nombre n est d'ailleurs quelconque ; lorsque l'on fait augmenter indéfiniment n on obtient pour l'expression de $f(x_1+h)$ la somme des termes d'une série, plus le terme complémentaire $\frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} f^{(n+1)}(x_1+\theta h)$; si ce terme tend vers 0, il est évident que la série est convergente et a pour somme $f(x_1+h)$.

Ce terme complémentaire est un produit de deux facteurs dont l'un $\frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}$ tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment quel que soit h (c'est le terme général de la série convergente e^h) ce terme tendra donc vers 0 toutes les fois que l'autre facteur $f^{(n+1)}(x_1+\theta h)$ n'augmente pas indéfiniment ; l'étude de ce dernier facteur présente d'ailleurs en général des difficultés, en particulier parce que le nombre θ n'est pas déterminé. On peut remarquer que lorsque le terme complémentaire tend vers 0 la série

$$f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_1) \dots\dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(x_1) + \dots\dots$$

est convergente, puisqu'elle a pour somme $f(x_1+h)$; la réciproque n'est pas exacte, mais si l'on reconnaît que la série n'est pas convergente on peut affirmer que le terme complémentaire ne tend pas vers 0.

Forme du reste de Cauchy. — Cauchy a donné une autre forme du terme complémentaire.

Pour arriver à cette forme je représente le terme complémentaire par $R(z-x)$ et je conduis le calcul comme précédemment : je considère la fonction

$$f(z) - f(x) - (z-x)f'(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2} f''(x) \dots - \frac{(z-x)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(x) - (z-x)R$$

qui s'annule pour les valeurs z et x_1 de la variable, donc sa dérivée

$$R - \frac{(z-x)^n}{1.2\dots n} f^{(n+1)}(x)$$

s'annule pour une valeur $(x_1+\theta h)$ de la variable et l'on a

$$R = \frac{[z-(x_1+\theta h)]^n}{1.2\dots n} f^{n+1}(x_1+\theta h) = \frac{h^n}{1.2\dots n}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_1+\theta h)$$

Le terme complémentaire prend donc la forme

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\dots n}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_1+\theta h)$$

L'étude de ce terme est quelquefois plus facile que celle du terme obtenu précédemment.

Il semble au premier abord que ce terme ne puisse pas être égal au précédent puisque dans l'écriture on passe du 1er au 2e en introduisant le facteur $\frac{(1-\theta)^n}{n+1}$, qui n'est généralement pas égal à l'unité ; mais il faut bien observer que θ n'a pas la même valeur dans les deux expressions.

Le théorème de Taylor donne donc dans certains cas, qui sont précisés par une théorie due à Cauchy, le développement de l'accroissement d'une fonction en série de puissances de l'accroissement de la variable.

Il est un cas où ce développement est toujours possible, c'est celui où l'on suppose l'accroissement h infiniment petit, car alors $f^{(n+1)}(x_1+\theta h)$ tend vers $f^{(n+1)}(x_1)$, que nous avons supposé fini ; il s'ensuit immédiatement que le terme complémentaire tend vers 0.

Formule de Mac-Laurin. — Si on applique le théorème de Taylor au cas où la valeur initiale de la variable est nulle, et si on désigne par x l'accroissement de la variable, il vient la formule

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)\ldots\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(\theta x)$$

Si le terme complémentaire tend vers 0 lorsque (n) augmente indéfiniment, cette formule donne le développement de la fonction considérée en série de puissances.

Il faut en particulier pour cela que la série obtenue soit convergente ; c'est là une condition nécessaire qui permet dans certains cas de reconnaître que le développement est impossible.

Pour les fonctions e^x, $\cos x$, et $\sin x$ le développement est possible pour toute valeur de x.

Développement de e^x. — Soit la fonction e^x ; toutes ses dérivées successives sont e^x, qui devient égal à l'unité lorsque l'on fait x nul.

On obtient donc la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}$$

Le terme complémentaire est $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}e^{\theta x}$

il tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, puisque le

premier tend vers 0 comme terme général d'une série convergente et que le second $e^{\theta x}$ reste fini car il est toujours compris entre 1 (e^0) et e^x.

Développement de cos x et de sin x. — Si je considère la fonction $\cos x$, ses dérivées successives se reproduisent de 4 en 4. Ce sont :

$$f'(x) = -\sin x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \sin x$$
$$f^{(IV)}(x) = \cos x$$

Pour $x = 0$, elles deviennent alternativement $0, -1, 0, +1$, en sorte que la série obtenue est :

$$1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1234} - \frac{x^6}{12.3.4.5.6} + \ldots\ldots \frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2\ldots.(2n)}$$

L'expression $f^{(2n+1)}(\theta x)$, qui figure dans le terme complémentaire étant un sinus ou un cosinus, reste évidemment toujours finie. — Ce terme tend donc vers zéro, et le développement en série est toujours possible.

Si l'on considère la fonction $\sin x$, les calculs sont en tous points analogues, et l'on obtient le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots.$$

Si, à l'expression de $\cos x$, on ajoute celle de $\sin x$ multipliée par i; il vient :

$$\cos x + i \sin x = 1 + ix - \frac{x^2}{1.2} - \frac{ix^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{ix^5}{1.2.3.4.5} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2\ldots(2n)} + \frac{i(-1)^n x^{2n+1}}{1.2..(2n+1)} \ldots$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$1 + ix + \frac{(ix)^2}{1.2} + \frac{(ix)^3}{1.2.3} + \frac{(ix)^4}{1.2.3.4} + \frac{(ix)^5}{1.2.3.4.5} \ldots + \frac{(ix)^{2n}}{1.2\ldots(2n)} + \frac{(ix)^{2n+1}}{1.2\ldots.(2n+1)} \ldots$$

C'est là le développement de e^x dans lequel on a remplacé la variable x par variable $x.i$. — Ce sera par définition e^{xi}. On aura donc :

$$(1)\quad \cos x + i \sin x = e^{xi}$$

De même : $(2)\quad \cos x - i \sin x = e^{-xi}$

e^{-xi} étant défini comme somme de la série que l'on obtient en remplaçant x par $(-xi)$ dans la série e^x.

Logarithme d'une expression imaginaire. — On sait que le logarithme népérien x d'un nombre A est défini par l'équation :

$$e^x = A\,.$$

De même le logarithme X d'une expression imaginaire $(a+bi)$ sera défini par l'équation :

$$e^X = a + bi$$

Le logarithme inconnu X est lui-même une imaginaire de la forme $(x+yi)$. — On a donc :

$$e^{x+yi} = a + bi \qquad (1)$$

L'expression e^{x+yi} n'ayant pas encore été définie, nous la définirons en posant l'égalité

$$e^{x+yi} = e^x \times e^{yi}$$

Et comme la définition précédemment donnée entraîne

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

l'équation (1) s'écrit encore

$$e^x(\cos y + i \sin y) = a + bi$$

. Il en résulte $e^x = \sqrt{a^2+b^2}$ $\operatorname{tg} y = \frac{b}{a}$

c.à.d. $x + yi = \frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + i \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$

Développement de $(1+x)^m$. — Pour appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction $(1+x)^m$ je calcule ses dérivées successives dont la loi s'aperçoit immédiatement

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(p)}(x) = m(m-1)\ldots(m-p+1)(1+x)^{m-p}$$

Faisant x nul dans ces diverses dérivées, on obtient les coëfficients des différentes puissances de x et il vient la série

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 \ldots\ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)x^p}{1.2\ldots\ldots p}$$

Avant d'examiner le reste qui nous fera connaître dans quels cas ce développement est valable, je remarque qu'il ne peut l'être que si x est compris entre -1 et $+1$, car ce n'est que dans ce cas que la série obtenue est convergente (le rapport d'un terme au précédent $\frac{m-p}{p+1}x$ tend en valeur absolue vers x, la série n'est donc convergente que si la valeur absolue de x est inférieure à 1). Ceci posé je considère la forme du reste de Cauchy.

$$R = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p)}{1.2\ldots.p}(1-\theta)^p(1+\theta x)^{m-p-1}x^{p+1}$$

Il s'écrit encore

$$R = \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots\ldots p}x^{p+1}\right]\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^p(1+\theta x)^{m-1}$$

C'est un produit de 3 facteurs dont le premier tend vers 0 comme terme général d'une série convergente, le deuxième est la puissance d'exposant indéfiniment croissant d'un nombre toujours inférieur à l'unité, il ne saurait donc augmenter indéfiniment, il en est de même du troisième facteur dont l'exposant est fixe, donc le reste tend vers 0 et le développement est valable pour toute valeur de x en valeur absolue inférieure à l'unité

Développement de L (1+x). — La fonction $L(1+x)$ se développe de même, et l'on obtient, après avoir pris le reste sous la forme de Cauchy, la série

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots\cdots$$

Ce développement est valable pour toute valeur d'x inférieure à 1 et supérieure à -1.

Dans les exemples qui précèdent la loi de formation des dérivées successives est évidente et toute la question est ramenée à l'étude du reste; dans les exemples qui vont suivre la formation des coëfficients successifs du développement en série n'est plus évidente, nous indiquerons une méthode permettant de les former et qui nous fera ainsi connaître la forme du développement en série quand il est possible, mais nous n'aborderons pas l'étude du reste qui présente certaines difficultés.

Développement de arc sin x. Considérons la fonction

$$y = \text{arc}\sin x$$

Pour obtenir la loi de formation des dérivées successives, nous emploierons la méthode suivante qui réussit dans un grand nombre de cas analogues: on cherche une relation entre la fonction et ses premières dérivées, et on la choisit de telle manière que la dérivation $n^{\text{ième}}$ de chacune des expressions qui y figurent soit simple; cette dérivation fournit alors

une relation récurrente entre plusieurs dérivées successives et qui définit une dérivée d'ordre quelconque en fonction des précédentes. Le expressions qui figurent dans la relation considérée sont généralement des produits de deux facteurs PQ, leur dérivation $n^{\text{ième}}$ se fait par la formule de Leibnitz.

$$\frac{d^n(PQ)}{dx^n} = P\frac{d^nQ}{dx^n} + C_n^1\frac{dP}{dx}\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} \cdots\cdots + C_n^p\frac{d^pP}{dx^p}\frac{d^{n-p}Q}{dx^{n-p}} + Q\frac{d^nP}{dx^n}$$

cette dérivation devient très simple si à partir d'un certain rang les dérivées de l'un des facteurs s'annulent, c'est-à-dire si l'un de ces facteurs est un polynôme entier en x de faible degré.

On a dans le cas présent :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

On déduit de là en multipliant de part et d'autre par $(1-x^2)$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$$

Différentiant n fois cette relation il vient

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} - 2nx\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - n(n-1)\frac{d^ny}{dx^n} = x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + n\frac{d^ny}{dx^n}$$

Si je fais $x=0$ il reste

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = n^2\frac{d^ny}{dx^n}$$

Prenant Arc Sin $0 = 0$ et remarquant que la dérivée première est égale à l'unité et la dérivée seconde nulle, il vient

$$\text{arc sin } x = x + \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{x^5}{5}\,\frac{1.3}{2.4} \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{1.3\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots(2n)} + \cdots\cdots$$

On n'obtient ainsi le développement que de l'un des arcs ayant x pour sinus, tous les autres sont compris dans la formule $K\pi \pm y$, le signe plus devant être pris avec K pair et le signe moins avec K impair.

Dérivant la formule précédente il vient

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\,\frac{1.3}{2.4} \cdots\cdots\cdots\cdots + x^{2n}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} + \cdots\cdots\cdots$$

Cette formule n'est autre que celle que l'on obtient par le développement de $(1+x)^m$ précédemment indiqué

Développement de Sin m (arc Sin x). — Soit à développer en série la fonction

$$y = \sin m(\text{arc}\sin x)$$

Dérivant deux fois il vient

$$\frac{dy}{dx} = \cos m(\text{arc}\sin x)\, m(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -m^2(1-x^2)^{-1}\sin m(\text{arc}\sin x) + m\cos m(\text{arc}\sin x)\left[x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

La dernière équation s'écrit encore

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$$

Dérivant n fois cette relation différentielle il vient

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{d^{n+2}} - 2nx\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - n(n-1)\frac{d^ny}{dx^n} - x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - n\frac{d^ny}{dx^n} + m^2\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

Pour $x = 0$, il reste

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + (m^2-n^2)\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

Si on fait arc Sin $0 = 0$, la valeur de la fonction pour $x = 0$ est nulle, celle de sa dérivée première est m, et celle de sa dérivée seconde est nulle ; on obtient ainsi le développement

(1) $$\sin m(\text{arc}\sin x) = mx + \frac{m(1-m^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{1.2.3.4.5}x^5 \ldots + \frac{m(1-m^2)\ldots[(2n-1)^2-m^2]}{1.2\ldots(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots$$

Si l'on pose $x = \sin u$, cette formule se réduit à

$$\sin mu = m\sin u + \frac{m(1-m^2)}{1.2.3}\sin^3 u \ldots + \frac{m(1-m^2)\ldots[(2n-1)^2-m^2]}{1.2\ldots(2n+1)}\sin^{2n+1}u + \ldots$$

Si l'on fait par exemple $m = 3$, on obtient la formule connue

$$\sin 3u = 3\sin u - 4\sin^3 u.$$

Si l'on suppose m infiniment petit, l'arc m(arc Sin x) est infiniment petit et par suite son sinus se confond avec l'arc ; il vient alors pour $m=0$

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{(1-m^2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{(1-m^2)\ldots[(2n-1)^2-m^2]}{1.2\ldots(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots$$

Annulant m il vient la formule connue

$$\text{arc Sin } x = x + \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{x^5}{5}\,\frac{1.3}{2.4} \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots(2n)}$$

On peut encore de cette formule déduire l'expression du sinus d'un arc. En effet faisons simultanément croître indéfiniment m et décroître indéfiniment x, de telle manière que le produit mx reste constamment égal à z; on aura alors $x = \frac{z}{m}$.

D'ailleurs arc Sin x se confondra avec x et la formule (1) deviendra

$$\text{Sin } z = z + \frac{\frac{z^3}{m^2} - z^3}{1.2.3} + \frac{9\frac{z^5}{m^4} - 10\frac{z^5}{m^2} + z^5}{1.2.3.4.5} \cdots\cdots + \frac{\left[1.(3)^2\ldots(2n-1)^2\right]\frac{z^{2n+1}}{m^{2n}} \ldots\ldots + (-1)^n z^{2n+1}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(2n+1)} + \cdots\cdots$$

mais m étant infiniment grand et z fini il reste

$$\text{Sin } z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \cdots\cdots\cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)} + \cdots\cdots$$

Si nous revenons à l'expression obtenue pour Sin m(arc Sin x) nous pouvons remarquer qu'elle n'est pas la plus générale car on a supposé arc Sin $0 = 0$, cela a rendu nulles toutes les dérivées d'ordre pair de la fonction.

Si l'on prend arc Sin $0 = K\pi$, on aura une série de termes de degré pair et les termes de degré impair se trouveront multipliés par $\pm \cos mK\pi$.

Si je désigne par α la valeur considérée précédemment pour arc Sin x nous obtenons évidemment dans cette nouvelle hypothèse le développement de Sin $m(K\pi \pm \alpha)$, le signe + étant pris avec les valeurs paires de K, le signe − avec les valeurs impaires.

Or $\quad \text{Sin } m(K\pi \pm \alpha) = \text{Sin } mK\pi \text{ Cos } m\alpha \pm \text{Sin } m\alpha \text{ Cos } mK\pi$

Ce nouveau développement contient donc d'une part, comme nous l'avions prévu, le développement de Sin $m\alpha$ multiplié par $\pm \cos mK\pi$: ce sont les termes de degré impair; ceux de degré pair constituent le développement de Cos m (arc Sin x) calculé comme nous venons de le faire pour le sinus et multiplié par Sin $mK\pi$.

Ce développement de Cos m(arc Sin x) conduit aux mêmes calcul que précédemment, la formule référente est la même, mais les premières dérivées étant différentes la formule est différente : il vient :

$$\cos m(\text{arc Sin } x) = 1 - \frac{m^2x^2}{1.2} - \frac{m^2(4-m^2)}{1.2.3.4}\,x^4 \cdots\cdots - \frac{\left[m^2(4-m^2)\ldots(4n^2-m^2)\right] x^{2n}}{1.2\ldots\ldots\ldots2n}$$

Développement de arc tg. — La méthode suivie dans les exemples précédent conduit rapidement au développement en série de la fonction

$$y = \text{arc tg}\, x.$$

Partant de la relation immédiate

$$(1+x^2)\,\frac{dy}{dx} = 1,$$

on trouve la loi de récurrence suivante entre les dérivées où l'on a fait $x=0$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + n(n-1)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$$

En choisissant la détermination de y qui s'annule pour $x=0$, on a la formule

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots\cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots\cdots$$

Si on prend arc tg $0 = K\pi$, on doit ajouter $K\pi$ à ce développement.

10ème Leçon

Nous avons trouvé dans la leçon précédente les formules :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

On en déduit les formules d'Euler :

Formules d'Euler.

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Nous prendrons ces formules comme définitions du cosinus et du sinus d'un arc quelconque réel ou imaginaire.—

En particulier on voit que le cosinus d'un arc imaginaire est réel.

On déduit de ces formules: $tg\, x = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{i(e^{xi} + e^{-xi})}$

On voit que $tg\, x$ peut prendre toutes les valeurs possibles sauf la valeur i

L'équation $tg\, x = i$ donnerait en effet: $\sin x = i \cos x$

d'où: $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

ce qui est impossible parce que, même pour x imaginaire, on peut vérifier que les formules d'Euler donnent: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Nous avons trouvé $e^{x+yi} = e^x . e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$

En écrivant $e^{x+yi} = e^x . e^{yi}$

nous avons encore adopté une définition relative aux quantités imaginaires.— Il faut vérifier que les formules des quantités réelles s'appliquent aux quantités imaginaires, et que cette définition concorde avec les précédentes.

Application de cette Formule.— Logarithme d'une expression imaginaire.—

Nous appellerons logarithme de $x + yi$ l'exposant $u+vi$ de e tel que l'on ait:

$$e^{u+vi} = x + yi$$

D'où:

$$e^u (\cos v + i \sin v) = x + yi$$

Par suite:

$$e^u \cos v = x \qquad e^{2u} = x^2 + y^2$$

$$e^u \sin v = y \qquad tg\, v = \frac{y}{x}$$

D'où

$$u = \frac{1}{2} L(x^2 + y^2)$$

$$v = \text{arc } tg \frac{y}{x}$$

On a donc:

$$L(x+yi) = \frac{1}{2} L(x^2+y^2) + i \text{ arc } tg \frac{y}{x},$$ expression que nous avons déja rencontrée.

Ce logarithme a une infinité de valeurs; car arc $tg \frac{y}{x}$ a une infinité de valeurs $\alpha \pm K\pi$. Néanmoins on

ne peut ajouter un multiple quelconque de π ; parceque l'angle v n'est pas défini seulement par sa tangente, mais à la fois par son sinus et son cosinus.

On peut ajouter un multiple quelconque de 2π ; l'extrémité de l'arc est bien déterminée.

Si l'on ajoutait π par exemple, on multiplierait e^{u+vi} par $e^{\pi i} = -1$; et l'on aurait cherché le logarithme de la quantité changée de signe.—

Il y a là une grande difficulté dans la généralisation des formules et l'extension au cas de quantités imaginaires.— Dans certains cas cette généralisation trop grande conduit à des résultats particuliers.

Donnons en quelques exemples :

1er Exemple. Dans la formule $L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots\cdots$ faisons

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

sans nous inquiéter si c'est permis et si z est < 1, comme l'on faisait au commencement du siècle.

Il vient en séparant les parties réelles des parties imaginaires :

$$L\left[1+\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] = \rho\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\cos 3\varphi - \cdots\cdots$$
$$+ i\left[\rho\sin\varphi - \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi + \cdots\cdots\cdots\right]$$

Mais on vient de trouver :

$$L\left[(1+\rho\cos\varphi) + i\rho\sin\varphi\right] = \frac{1}{2}L(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi)$$
$$+ i \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi}$$

Egalons les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi} = \rho\sin\varphi - \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\sin 3\varphi - \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}L(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi) = \rho\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\cos 3\varphi - \cdots\cdots$$

<u>Pour $\rho = 1$</u> en particulier, $\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$,

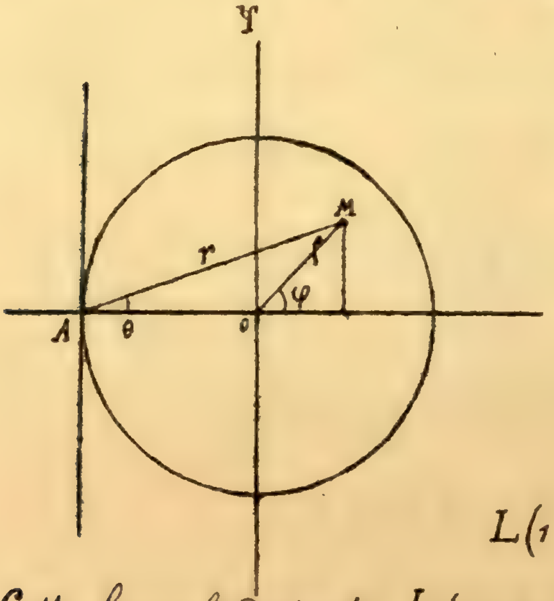
on a les formules :
$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2} L(2+2\cos\varphi) = \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \cdots\cdots$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a : $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots$, formule exacte ; mais pour $\varphi = \pi$, on a : $\frac{\pi}{2} = 0$, résultat absurde.

Il y a donc des limites à observer dans l'application de la formule.– Nous avons démontré que quand z est réel, il faut $z < 1$; on le démontre encore quand z est imaginaire.–

De plus nous avons écrit $\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2}$

Il fallait écrire : $\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2} + K\pi$, et déterminer le multiple de π de façon que la formule soit exacte.–



Montrons le graphiquement.

Représentons la quantité $x + yi$ par le point $M(x,y)$.– Nous sommes partis du développement de $L(1+z)$, qui supposait : $(z) < 1$; on ne doit donc considérer des points que à l'intérieur du cercle de rayon 1. Nous avons trouvé :

$$L(1+\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi) = \frac{1}{2}L(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi) + i\ \text{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi}$$

Cette formule devient : $L(1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi) = L(\overline{AM}) + i.\widehat{MAO}$

Pour $\rho = 1$ en particulier, nous avons des points sur le cercle, et l'angle $\widehat{MAO}$ reste toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; nous prendrons donc $\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2} \pm K\pi$, $\pm K$ étant choisi de façon que l'angle $\frac{\varphi}{2} \pm K\pi$ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Si par exemple $\varphi = 2\pi + \alpha$, (α étant compris entre 0 et π)
on prendra: $\frac{\varphi}{2} - \pi = \frac{\alpha}{2}$.—

2ème Exemple.

Dans la formule du binôme:

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \cdots\cdots$$

formule exacte pour $(z) < 1$,
faisons de même: $(z) = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.— Il vient:

$$(1+\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi)^m = 1 + m\rho\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{2!}\rho^2\cos 2\varphi + \cdots\cdots$$
$$+ i\left[m\rho\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{2!}\rho^2 \sin 2\varphi + \cdots\cdots\right]$$

Calculons le premier membre par la formule de Moivre, en posant:

$$1 + \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\left.\begin{aligned} 1+\rho\cos\varphi &= r\cos\theta \\ \rho\sin\varphi &= r\sin\theta \end{aligned}\right| \quad \text{d'où} \quad \left| \begin{aligned} r^2 &= 1 + \rho^2 + 2\rho\cos\varphi \\ tg\,\theta &= \frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi} \end{aligned}\right.$$

On peut donner comme précédemment la signification géométrique de ρ et θ .—

$$\text{Pour } \rho = 1, \qquad \left| \begin{aligned} r^2 &= 2(1+\cos\varphi) = 4\cos^2\frac{\varphi}{2} \\ \theta &= \text{arc}\, tg\left(tg\,\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right.$$

$$\text{Il ne faut pas prendre} \left| \begin{aligned} r &= +2\cos\frac{\varphi}{2} \\ \theta &= \frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right. \text{, mais} \left| \begin{aligned} r &= \pm 2\cos\frac{\varphi}{2} \\ \theta &= \frac{\varphi}{2} \pm K\pi . \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend les premières valeurs, comme on faisait autrefois, on obtient les deux formules:

$$\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^m \cos\frac{m\varphi}{2} = 1 + m\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{2!}\cos 2\varphi + \cdots\cdots$$

$$\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^m \sin\frac{m\varphi}{2} = m\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{2!}\sin 2\varphi + \cdots\cdots$$

desquelles l'on déduit, en multipliant la 1ère par $\cos\frac{m\varphi}{2}$, la 2ème par $\sin\frac{m\varphi}{2}$, ajoutant membre, puis posant $\varphi = 2x$:

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \cdots\cdots$$

Pour $m = 2$, on a une identité connue : $4\cos^2 x = \cos 2x + 2 + \cos 2x$

Faisons $m = \frac{1}{3}$ On a :

$$x = \pi \qquad -2^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{\pi}{3}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2} + \cdots\right] = \frac{1}{2}\,2^{\frac{1}{3}}$$

résultat absurde.

Poisson a indiqué cette anomalie sans l'expliquer. —

C'est Poinsot qui l'a résolue : En posant $\theta = \operatorname{arctg}\left(tg\,\frac{\varphi}{2}\right)$ il ne faut pas prendre $\theta = \frac{\varphi}{2}$, mais $\theta = \frac{\varphi}{2} + K\pi$.

La formule est alors :

$$(2\cos x)^m \cos mK\pi = \cos mx + m\cos(m-2)x + \cdots\cdots$$

On déterminera K de façon que l'angle θ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (Abel).

On démontre que ce dernier développement ne peut différer du développement donné par la formule de Mac-Laurin.

11ème Leçon

Cercle de convergence d'une série imaginaire
Condition de convergence d'une série imaginaire

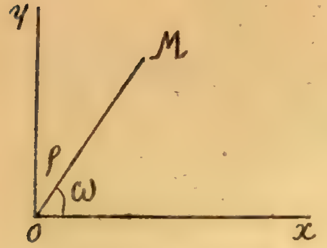
Pour qu'une fonction d'une variable réelle ou imaginaire soit développable en série il faut

1° que la fonction ne soit pas infinie

2° qu'elle ne soit pas indéterminée

C'est Cauchy qui a le premier nettement défini ces conditions que nous établirons après avoir montré ce que l'on entend par cercle de convergence.

Nous désignerons la variable par $z = x + yi$
ou encore par $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$
et nous la représenterons par un point M rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, ayant pour abscisse x et pour ordonnée y. La distance OM est égale à ρ et l'angle $\widehat{xOM}$ à ω.



Ceci posé, je suppose que l'on ait obtenu pour la fonction $F(z)$ le développement

$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + A_n z^n + \cdots\cdots\cdots$$

Cherchons tout d'abord dans quels cas cette série est convergente. Pour cela je prends la variable sous la forme

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

le terme général de la série s'écrit alors

$$A_n \rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

Je considère le nombre ρ_1 défini par cette condition d'être le plus grand qui soit tel que le produit $A_n \rho^n$ reste fini lorsque n augmente indéfiniment, et je dis que la série est convergente pour toute valeur de la variable telle que ρ soit inférieur à ρ_1.

Autrement dit, la série est convergente pour toute valeur de la variable représentée par un point intérieur au cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ_1, et divergente pour toute valeur de la variable représentée par un point extérieur au cercle. (Le théorème ne spécifie pas ce qui a lieu dans le cas où $\rho = \rho_1$).–

Pour établir cette propriété, je remarque tout d'abord que si ρ est supérieur à ρ_1, $A_n \rho^n$ augmente indéfiniment avec n et par suite aussi $A_n \rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega)$ qui est le terme général de la série, donc elle n'est pas convergente.

Si au contraire on a $\rho < \rho_1$, le terme général de la série s'écrit

$$A_n \rho_1^n \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n (\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

son module $A_n \rho_1^n \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n$ est inférieur à $K \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n$, K étant un nombre aussi grand que l'on veut, mais qu'on peut déterminer

puisque $A_n \rho_1^n$ n'augmente pas indéfiniment.

Or $K\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n$ est le terme général d'une progression géométrique convergente; donc la série des modules des termes de la serie proposée est convergente et il en est de même de la série proposée.

La propoition est donc établie. Il en résulte que si le point qui représente la variable sort du cercle de convergence, la série devient divergente et elle le reste pour toute valeur de la variable dont le module est supérieur.

Donc, la série proposée n'est convergente que pour les valeurs de la variable inférieure à toute valeur la rendant infinie. Ce n'est que pour ces valeurs que le développement ~~peut~~ est possible.

Première condition de Cauchy. — Je suppose une fonction d'une variable imaginaire

$$z = x + yi$$

représentée par la série

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + A_n z^n$$

pour certaines valeurs de z.

On démontre d'ailleurs que cette série ne peut pas différer de celle de Mac Laurin.

Les valeurs de z pour lesquelles ce développement est possible sont nécessairement intérieures au cercle de convergence de la série. Leur module est donc inférieur à celui de toute valeur rendant la fonction infinie. En effet si l'on suppose que toutes les fois que la série est convergente elle représente la fonction il en résulte que la fonction devient infinie pour une valeur de module supérieur ou égal au rayon du cercle de convergence.

Nous trouvons donc une première condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les valeurs de la variable pour que le développement en série soit possible c'est que leur module soit inférieur à celui de toute valeur réelle ou imaginaire rendant la fonction infinie.

Cette condition avait été donnée par Cauchy comme condition nécessaire et suffisante, elle est applicable par exemple à la fonction arc tg z, comme nous allons le voir.

Fonction arc tg z. Considérons la fonction arc tg z et cherchons les valeurs de la variable qui la rendent infinie.

Je pose $\operatorname{arc\,tg}(x+yi) = u + vi$

$$x + yi = \operatorname{tg}(u+vi)$$

$$\text{Or } \operatorname{tg} vi = \frac{\sin vi}{\cos vi} = \sigma i$$

en désignant par σ le quotient

$$\sigma = \frac{e^{+v} - e^{-v}}{e^{+v} + e^{-v}}$$

On a donc

$$x + yi = \frac{\operatorname{tg} u + \sigma i}{1 - \sigma i . \operatorname{tg} u}$$

En égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on a deux équations qui définissent u et v.

La fonction $u + vi$ deviendra infinie lorsque l'une ou l'autre de ces fonctions u et v le sera.

Or u n'étant défini que par sa tangente n'augmente jamais indéfiniment lorsque x et y tendent vers des valeurs finies quelconques, quant à v il est défini par l'équation

$$\frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}} = \sigma$$

Lorsque v est infini l'une des expressions e^{-v} ou e^{+v} s'annule (suivant que v est positif ou négatif) et σ se réduit à l'unité.

Réciproquement si $\sigma = \pm 1$ l'équation se réduit à

$$e^{\pm v} = 0$$

ce qui donne bien $v = \pm\infty$

Si l'on fait $\sigma = \pm 1$ l'équation (1) se réduit à

$$x + yi = \frac{\operatorname{tg} u \pm i}{1 \pm i \operatorname{tg} u} = \frac{i(\operatorname{tg} u \pm i)}{(i \mp \operatorname{tg} u)} = \pm i.$$

La fonction devient donc infinie pour

$$z = \pm i$$

Ce sont deux valeurs de module 1; donc la série ne saurait être développable que pour les valeurs de module inférieur à 1 et l'on vérifie directement qu'elle est développable pour toutes

ces valeurs.

Si nous ne considérons que les valeurs réelles de la variable il résulte de ce qui précède que la fonction n'est développable que pour les valeurs de la variable comprises entre +1 et −1 et cependant pour ces valeurs la fonction ne présente aucune particularité.

Le calcul que nous avons fait pour trouver les valeurs de la variable pour lesquelles arc tg z est infini, a l'inconvénient de séparer la partie réelle de la partie imaginaire de la fonction ce qui est contraire au principe de l'étude que nous faisons.

On peut le faire directement ainsi.

Je pose :

$$\operatorname{arc\,tg} z = u$$

Donc

$$z = \operatorname{tg} u$$

$$z = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\left(\frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i}\right)}{\left(\frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2}\right)}$$

D'où

$$\frac{iz}{1} = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{e^{ui} + e^{-ui}}$$

On en déduit

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{e^{ui}}{e^{-ui}} = e^{2ui}$$

Donc

$$2ui = L\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

et

$$u = \frac{1}{2i} L\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

La fonction devient infinie pour les valeurs de z qui annulent ou rendent infini l'argument du logarithme c.à.d. pour

$$z = \pm i$$

Deuxième condition de Cauchy. — Le théorème de Cauchy que nous venons d'énoncer fait donc connaître la condition nécessaire et suffisante pour que la série arc tg z et quelques autres soient développables en série, mais ce théorème est en défaut pour un certain nombre de fonctions telles que $(1+z)^m$ qui ne devient

infini pour aucune valeur de z, si m est positif et qui cependant ne peut être développée en série que pour les valeurs de z de module inférieur à 1 (nous l'avons déjà vu dans le cas où z est réel et il est facile de le vérifier dans le cas où z est imaginaire).

Cauchy a pu compléter son théorème en partant de la remarque suivante.—

Pour toutes les valeurs pour lesquelles le développement en série est possible la fonction proposée et la fonction définie par la série sont deux fonctions qui ont évidemment les mêmes propriétés, or la série définit une fonction continue de la variable et qui a pour chaque valeur de la variable une valeur et une seule bien déterminée.

Or un grand nombre de fonctions ont plusieurs déterminations, telles sont par exemple $(z-\alpha)^m$ qui admet autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans le dénominateur de m, quand m est une fraction.

Fonction $(z-\alpha)^m$.— Il semble que l'on puisse séparer la fonction $(z-\alpha)^m$ en m fonctions distinctes ayant une seule détermination, et pouvant par suite être développées; il n'en est rien le plus souvent, car les diverses déterminations de la fonction sont tellement mêlées qu'on ne peut les séparer sans détruire la continuité de la fonction, nous l'avons déjà fait voir pour la fonction

$$L(z)$$

il en est de même pour la fonction

$$(z-\alpha)^m$$

En effet soit

$$z-\alpha = \rho\,(\cos\omega + i\,\sin\omega)$$

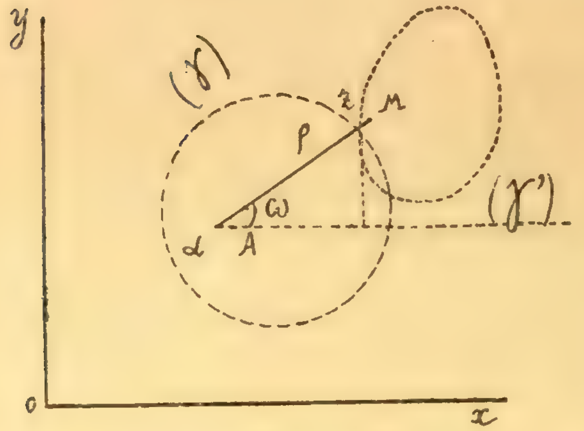
On a

$$(z-\alpha)^m = \rho^m\,(\cos m\omega + i\,\sin m\omega) = \rho^m e^{mi\omega}$$

La quantité ρ^m est comme on sait la puissance $m^{ième}$ arithmétique de ρ.

Elle est donc parfaitement déterminée. Quant à ω, il est défini à un multiple près de 2π, et par suite $m\omega$ à un multiple près de $2m\pi$; par suite $+(z-\alpha)^m$ admet autant de valeurs différentes que $e^{mi(\omega+2K\pi)}$. On pourrait évidemment obtenir une valeur parfaitement définie de $(z-\alpha)^m$ en convenant de prendre pour ω le plus petit angle positif admettant pour

sinus et cosinus les lignes données. Les fonctions $(z-\alpha)$ et par suite $(z-\alpha)^m$ que l'on définirait ainsi ne seraient pas continues.



En effet considérons les points A et M qui représentent les quantités α et z. Si l'on pose $(z-\alpha)=\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$, ρ est, comme on sait, égal au rayon vecteur AM et ω est l'angle de AM avec la parallèle à l'axe des x menée par le point A.

Ceci posé, si je déplace le point M sur une courbe continue, l'imaginaire z qu'il représente doit varier de manière continue et par suite aussi $z-\alpha$ qui doit en être une fonction continue. Si je fais tourner le point M autour du point A sur la courbe γ, l'angle ω pour lequel j'ai au début pris une certaine détermination augmente d'une manière continue (je fais tourner AM dans le sens direct), et lorsque le point M est revenu à sa position primitive, l'angle ω a augmenté de 2π.

Nous sommes donc obligés pour respecter la continuité de la fonction $(z-\alpha)$ de prendre une nouvelle valeur de ω supérieure de 2π à celle que nous avons considérée précédemment, et nous ne pouvons plus observer la convention faite précédemment pour le choix de la valeur à donner à ω.

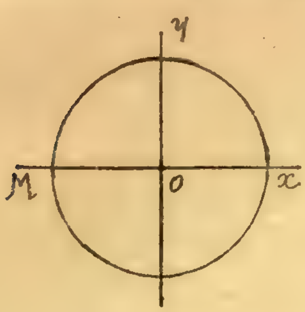
Si au contraire nous déplaçons le point M sur une courbe fermée telle que γ', n'enfermant pas le point A, rien ne s'oppose à une telle convention et nous pouvons faire correspondre à un point du plan une valeur de ω fixée par cette condition.

Nous obtenons pour $(z-\alpha)$ et $(z-\alpha)^m$ une fonction parfaitement continue et déterminée, et nous en obtiendrons successivement plusieurs en faisant varier la convention par laquelle nous choisissons la valeur de ω.

Fonction $(1+z)^m$. — Ceci posé, considérons la fonction $(1+z)^m$ qui est un cas particulier de celle sur laquelle nous venons de raisonner.

Pour toute valeur différente de -1 la fonction est finie quel que soit m, et si nous faisons déplacer le point qui

représente z sur une courbe quelconque mais n'enveloppant pas le point M qui représente -1, les différentes déterminations de la fonction peuvent être séparées en fonctions distinctes parfaitement définies qui satisfont donc aux deux conditions énoncées par Cauchy. — Or, si nous admettons que toutes les fois qu'une fonction est développable en série pour une valeur de la variable, elle l'est encore pour toute valeur de même module, il en résulte immédiatement que la fonction sera développable pour toutes les valeurs représentées par les points intérieurs à un cercle ayant pour centre l'origine, il est donc nécessaire dans ce cas que le point qui représente la variable soit à l'intérieur du cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon OM, c'est-à-dire que le module de z soit inférieur à l'unité. — On vérifie directement que la condition est suffisante.



Considérons maintenant la fonction $L(1+z)$. Nous avons vu précédemment que la fonction logarithmique n'est déterminée qu'à un multiple près de $2\pi i$ et que l'on ne peut pas, par une convention convenable, obtenir une fonction continue et parfaitement définie de la variable, si le point qui le représente peut tourner autour de l'origine. Il s'ensuit que nous ne pouvons obtenir pour $L(1+z)$ une fonction continue et définie de la variable que si le point qui la représente ne peut pas se déplacer en tournant autour du point M qui représente la valeur -1, condition qui sera réalisée si le point représentant la variable reste intérieur au cercle de rayon 1, c'est-à-dire si le module de la variable reste inférieur à 1.

12ème Leçon

Applications du théorème de Taylor.

Le théorème de Taylor sert encore à développer l'accroissement

infiniment petit Δy d'une fonction correspondant à un accroissement infiniment petit Δx de la variable. On a

$$\Delta y = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta x\, \varphi'(x) + \frac{\Delta x^2}{2}\varphi''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!}\varphi'''(x) + \cdots \frac{\Delta x^n}{n!}\varphi^n(x)$$

$$= dy + \frac{1}{2!}d^2y + \frac{1}{3!}d^3y + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}d^ny$$

quand Δx tend vers 0. Si on s'arrête au n^{e} terme le reste est

$$\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(x+\theta.\Delta x)$$

En général $\varphi^{(n+1)}(x+\theta.\Delta x)$ n'est ni nul ni infini; donc le reste est du $(n+1)^e$ ordre et peut être négligé devant les termes précédents.

Théorème. — La plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines d'une courbe à double courbure est infiniment petite du 3e ordre.

Pour établir cette propriété remarquable, je considère une droite mobile dépendant d'un seul paramètre, une autre infiniment voisine (c. à. d. répondant à un accroissement infiniment petit du paramètre variable, accroissement que je prends comme infiniment petit principal), et leur plus courte distance.

Soit

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

les équations de la droite considérée;

$$x = (a+\Delta a)z + p + \Delta p$$
$$y = (b+\Delta b)z + q + \Delta q$$

les équations de la droite infiniment voisine.

La plus courte distance de deux droites données par les équations

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z + p' \\ y = b'z + q' \end{cases}$$

est comme on sait

$$D = \frac{(a'-a)(q'-q) - (b'-b)(p'-p)}{\sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (ab'-ba')^2}}$$

Appliquant cette formule aux droites considérées, il vient

$$D = \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{R}$$

L'expression $R = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + [a(b+\Delta b) - b(a+\Delta a)]^2}$ est un infiniment petit du 1er ordre, puisque Δa et Δb le sont tous deux et que la quantité sous radical se compose d'une somme de 3 carrés qui ne sauraient se détruire. — Par suite l'ordre d'infinitude de D est d'une unité moindre que celui du numérateur $\Delta a\, \Delta q - \Delta b\, \Delta p$. Pour étudier l'ordre d'infinitude de cette expression, je développe chacun des accroissements par la formule de Taylor.

On a

$$\Delta a = da + \frac{1}{2}\, d^2 a + \frac{1}{6}\, d^3 a + \cdots\cdots$$

$$\Delta b = db + \frac{1}{2}\, d^2 b + \frac{1}{6}\, d^3 b + \cdots\cdots$$

$$\Delta p = dp + \frac{1}{2}\, d^2 p + \frac{1}{6}\, d^3 p + \cdots\cdots$$

$$\Delta q = dq + \frac{1}{2}\, d^2 q + \frac{1}{6}\, d^3 q + \cdots\cdots$$

L'expression considérée ne contient évidemment que des termes du 2e ordre et d'ordre supérieur. L'ensemble des termes du 2e ordre est

$$da\, dq - db\, dp$$

Dans le cas général, cette expression n'est pas nulle et D est un infiniment petit du premier ordre. — Si ces termes disparaissent, c'est que les droites considérées touchent une même courbe.

En effet pour que les droites

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q. \end{cases}$$

touchent une courbe fixe, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer sur chacune d'elles un point dont le lieu soit une courbe admettant la droite considérée comme tangente.

Or les valeurs de dx, dy, dz relatives à la génératrice considérée sont définies par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} dx = a\,dz \\ dy = b\,dz \end{cases}$$

Celles qui sont relatives à la courbe satisfont aux deux équations suivantes (obtenues en différentiant les équations de la droite où l'on considère $a\ b\ p\ q$ comme variable)

$$(2) \quad \begin{cases} dx = a\,dz + z\,da + dp \\ dy = b\,dz + z\,db + dq \end{cases}$$

Pour que la direction définie par le système (1) puisse satisfaire au système (2) il faut que l'on ait simultanément.

$$z\,da + dp = 0$$
$$z\,db + dq = 0$$

c'est à dire que ces deux équations définissent la même valeur de z, ce qui exige que l'on ait

$$da\,dq - db\,dp = 0$$

telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la génératrice enveloppe une courbe gauche (– qui est alors définie par les équations

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$
$$z = -\frac{dp}{da}.)$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que la distance des deux génératrices infiniment voisines d'une surface réglée soit un infiniment petit d'ordre supérieur au premier est que la surface soit développable.

S'il en est ainsi, cette plus courte distance est un infiniment petit du 3.e ordre. En effet les termes du 2.e ordre de D seront donnés par ceux du 3.e ordre de $\Delta a\,\Delta q - \Delta b.\Delta p$.

Or l'ensemble de ceux-ci est

$$\frac{1}{2}\left(da\,d^2q + dq\,d^2a - db\,d^2p - d^2b\,dp\right)$$

il est nul, car c'est précisément la différentielle de l'expression

$$da\,dq - db\,dp$$

qui est nulle par hypothèse.

Cette distance se réduit au 3.e ordre, car les termes du 4.e ordre de $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$ ne disparaissent pas. En effet leur ensemble est

$$\frac{1}{6}\,da\,d^3q + \frac{1}{4}\,d^2a\,d^2q + \frac{1}{6}\,dq\,d^3a - \frac{1}{6}\,db\,d^3p - \frac{1}{4}\,d^2b\,d^2p - \frac{1}{6}\,dp\,d^3b$$

Or la différentielle seconde de

$$da\,dq - dp\,db$$

est nulle. On a donc

$$da\,d^3q + 2\,d^2a\,d^2q + dq\,d^3a - db\,d^3p - 2\,d^2b\,d^2p - dp\,d^3b = 0.$$

Il en résulte que l'ensemble des termes considérés se réduit à

$$\frac{1}{12}\left(d^2b\, d^2p - d^2a\, d^2q\right)$$

et cette expression n'est nulle que si l'arête de rebroussement de la surface développable est plane, c'est-à-dire si toutes les génératrices sont dans un même plan.

En effet, supposons que l'on ait

$$(1) \qquad d^2b \quad d^2p - d^2a \quad d^2q = 0$$

en supposant d'ailleurs $da\, dq - db\, dp = 0$

on a vu que, si cette dernière condition est remplie pour tout point de l'arête de rebroussement on a simultanément

$$z\, da + dp = 0$$
$$z\, db + dq = 0$$

on en déduit en différentiant

$$z d^2a + da\, dz + d^2p = 0$$
$$z d^2b + db\, dz + d^2q = 0$$

d'où

$$d^2p = -z d^2a - da\, dz$$
$$d^2q = -z\, d^2b - db\, dz$$

Portons dans l'équation (1), il vient

$$d^2a\left(-z d^2b - dz\, db\right) = d^2b\left(-z\, d^2a - dz\, da\right)$$

ou $$dz\left(db\, d^2a - da\, d^2b\right) = 0$$

Cette équation entraîne ou bien $dz = 0$; dans ce cas la courbe est dans un plan parallèle à xoy; ou bien

$$db.\, d^2a - da\, d^2b = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d^2a}{da} = \frac{d^2b}{db}$$

d'où, en revenant aux différentielles premières

$$L\,(da) = L\,(db) + L\,K$$

ou $$da = K\, db$$

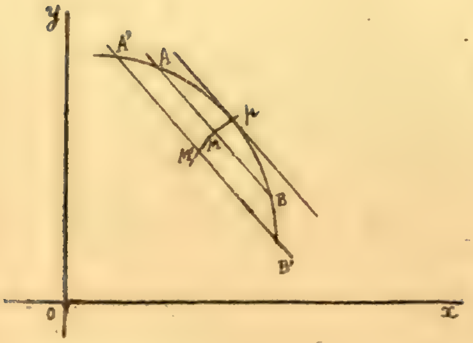
et en revenant aux fonctions
$$a = Kb + h$$
Mais on a pour tout point de la courbe
$$dx = a\,dz$$
$$dy = b\,dz$$
La relation trouvée entraîne donc
$$dx = K\,dy + h\,dz$$
ou
$$x = Ky + hz + l$$
c'est-à-dire que la courbe est plane, donc la surface lieu des tangentes est un plan et dans ce cas la plus courte distance de deux génératrices est rigoureusement nulle.

Nous arrivons donc au résultat suivant.

La plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines d'une surface réglée est un infiniment petit du 1er ordre dans le cas général. — Si elle n'est pas du 1er ordre, elle est ou bien du 3e " ordre et la surface est développable, ou bien rigoureusement nulle et la surface est un plan.

Autre exemple. Soit une courbe plane $y = \varphi(x)$.

Cherchons le coëfficient angulaire m de la tangente à une courbe diamétrale en un point de rencontre avec la courbe donnée.



Une courbe diamétrale est comme on sait le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée. Elle passe par le point $\mu(x.y)$ où la tangente est parallèle à la direction et la tangente en μ à la courbe diamétrale est la limite de position de la droite μM quand M tend vers μ, le coëfficient angulaire m de cette droite est en désignant par $x+h$ et $x-h'$ les abscisses des points A et B:

$$m_1 = \frac{\varphi(x) - \dfrac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h')}{2}}{x - \left[x + \dfrac{h-h'}{2}\right]} = \frac{(h-h')\varphi'(x) + (h^2+h'^2)\dfrac{\varphi''(x)}{2} + \cdots}{h-h'}$$

D'autre part AB est parallèle à la tangente en μ

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h')}{h+h'}=\varphi'(x)$$

ou

$$\varphi'(x)+\frac{h-h'}{2!}\varphi''(x)+\frac{h^2-hh'+h'^2}{3!}\varphi'''(x)+\cdots\cdots=\varphi'(x)$$

$$\frac{h-h'}{2!}\varphi''(x)+\frac{h^2-hh'+h'^2}{3!}\varphi'''(x)+\cdots\cdots\cdots=0$$

Il en résulte que $h-h'$ est du second ordre ; on peut donc remplacer $h^2-hh'+h'^2$ par h^2 en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second ; on aura . en annulant les termes du second ordre

$$\frac{h-h'}{2!}\varphi''(x)+\frac{h^2}{3!}\varphi'''(x)=0$$

d'où

$$\frac{h-h'}{h^2}=-\frac{\varphi'''(x)}{3\varphi''(x)}$$

Je reprends le coëfficient angulaire de μM

$$m_1=\varphi'(x)+\frac{h^2+h'^2}{2(h-h')}\varphi''(x)$$

il devient à la limite

$$m=\varphi'(x)+\frac{h^2}{h-h'}\varphi''(x)=\varphi'(x)-3\frac{\varphi''(x)}{\varphi'''(x)}\varphi''(x)$$

$$m=\varphi'(x)-3\frac{\overline{\varphi''(x)}^2}{\varphi'''(x)}$$

Applications. Quelle est la courbe coupée à angle droit par tous ses diamètres.

Elle doit satisfaire à l'équation

$$(1)\qquad \left[\frac{dy}{dx}-3\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^3y}{dx^3}}\right]\frac{dy}{dx}+1=0$$

Nous vérifierons simplement que cette équation convient au cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$$

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

je tire des deux dernières équations

$$y - \beta = - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

d'où

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

j'en déduis

$$L\, r + L\, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2} L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

en prenant la dérivée par rapport à x

$$\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 3 \quad \frac{\frac{dy}{dx}\ \frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ou

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3 \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^3y}{dx^3}}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{dy}{dx} \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^3y}{dx^3}} = 0$$

En suivant une marche inverse on arriverait à trouver que toute courbe satisfaisant à l'équation différentielle a un rayon de courbure constant et par suite est un cercle.

Autre application. Quelle est la courbe dont tous les diamètres sont parallèles entre eux.

L'équation différentielle de la courbe est

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} - 3 \, \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^3y}{dx^3}} = \alpha$$

l'équation de la courbe contient donc quatre paramètres arbitraires. Vérifions que la parabole satisfait à l'équation (1)

$$(y - \alpha x)^2 + mx + ny + p = 0$$

$$2(y - \alpha x)\left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right) + m + n\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right)^2 + 2(y - \alpha x)\frac{d^2y}{dx^2} + n\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$n + 2(y - \alpha x) + 2\,\frac{\left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0$$

je prends encore la dérivée

$$\frac{dy}{dx} - \alpha + \frac{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right) - \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = 0$$

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx} - \alpha\right) = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} - 3\,\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)} = \alpha$$

C.Q.F.D.

13ème Leçon

Formes indéterminées

Forme $\frac{0}{0}$. — Considérons une expression de la forme $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, et supposons qu'une même valeur a de la variable annule simultanément les deux termes de cette fraction, qui, alors se présentera sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Proposons-nous de chercher la vraie valeur de cette expression, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend la valeur de la fraction lorsque x tend vers a, dans les cas où cette limite est déterminée.

On peut, dans un certain nombre de cas appliquer le théorème connu sous le nom de règle de l'Hospital.

Théorème. — Le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ a même limite que le rapport des dérivées $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour une valeur a de la variable qui annule simultanément les deux termes de la fraction.

En effet, pour la valeur $a+h$ de la variable voisine de a, la valeur de l'expression est $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$. Je développe le numérateur et le dénominateur par la formule de Taylor. Puisque $f(a)$ et $\varphi(a)$ sont nuls, il vient :

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{hf'(a)+R}{h\varphi'(a)+R'} = \frac{f'(a)+\frac{R}{h}}{\varphi'(a+\frac{R'}{h}}$$

Les restes $\frac{R}{h}$ et $\frac{R'}{h}$ contenant encore h en facteur, ils tendent vers zéro. — (On suppose que les dérivées secondes ne soient pas infinies dans le voisinage de la valeur a). Le quotient proposé tend donc vers la valeur $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$. — Si $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, dans le développement de $f(a+h)$ et de $\varphi(a+h)$, on ira jusqu'au deuxième terme et l'on aura :

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f''(a)+\frac{R_1}{h^2}}{\varphi''(a)+\frac{R_2}{h^2}}$$

La vraie valeur cherchée sera donc $\frac{f^n(a)}{\varphi^n(a)}$ si l'on n'a pas simultanément $f^n(a) = 0$, $\varphi^n(a) = 0$ et ainsi de suite.

Cette règle est souvent compliquée ou impossible à appliquer suivant qu'on dérive successivement un trop grand nombre de fois, ou que toutes les dérivées successives contiennent des facteurs qui deviennent nuls ou infinis pour la valeur considérée de la variable.

C'est ce qui arrive notamment pour la vraie valeur de la fraction $\frac{(x-a)^m}{(x-a)^n}$ pour $x = a$ m et n étant fractionnaires.

Il arrive souvent aussi que la règle de l'Hospital soit d'une application facile mais on a presque toujours avantage à se servir des développements en série.

Exemple. Soit à trouver la vraie valeur de l'expression

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$$

pour $x = 0$. On peut écrire

$$\frac{e^x\left[1 - e^{\sin x - x}\right]}{x^3} = e^x \,\frac{1 - e^{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cdots\cdots}}{x^3}$$

et à la limite l'expression a pour valeur

$$e^x \,\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Autre exemple. — Proposons-nous de trouver la limite de

$$\frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$$

La règle de l'Hospital pourrait être appliquée mais le calcul fait voir qu'il faut prendre 6 dérivées successives lesquelles se compliquent de plus en plus ; il est plus simple de développer en série les deux fonctions qui figurent au numérateur en s'arrêtant aux termes du même ordre d'infinitude que le dénominateur, il vient ainsi pour le numérateur de l'expression proposée.

$$x\left(\sin x - \frac{1}{6}\sin^3 + \frac{1}{120}\sin^5 x \ldots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{120} + \cdots\right)^2$$

Remplaçant encore les diverses puissances du sinus par leur développement limité aux termes du 6e degré, il vient

$$x\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\frac{x}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{x}{120}x^5-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2$$

Réduisant les termes semblables et négligeant comme précédemment les termes de degré supérieur au 6e, il reste

$$\frac{1}{18}x^6$$

c'est-à-dire que le numérateur de l'expression proposée est $\frac{1}{18}x^6+\varepsilon$; ε étant infiniment petit par rapport à x^6, le quotient considéré, égal à $\dfrac{\frac{1}{18}x^6+\varepsilon}{x^6}$, a donc pour limite $\frac{1}{18}$, d'après le théorème connu relatif au quotient de deux infiniment petits.

Autre exemple.— Soit encore à chercher quand x tend vers zéro, la vraie valeur de l'expression :

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

Le rapport des dérivées est :

$$\frac{-\frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}L(1+x)+\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}}{1}=\frac{x(1+x)^{\frac{1}{x}-1}-(1+x)^{\frac{1}{x}}L(1+x)}{x^2}$$

Le rapport des dérivées se présente encore sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=0$, et il est aisé de voir qu'il en sera encore de même pour toutes les dérivées successives à cause du facteur $(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$.

L'artifice du calcul est évident.— Le rapport des dérivées peut s'écrire :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[\frac{x-1(1+x)L(1+x)}{x^2}\right]$$

La limite de cette expression est égale au produit des limites de ses deux facteurs.— Le premier de ces deux facteurs tendant évidemment vers e, il suffit de chercher la limite du 2^d^. Il se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; le rapport des dérivées est :

$$-\frac{L(1+x)}{2x}$$

Cette expression se présente encore sous la forme $\frac{0}{0}$, mais, elle est beaucoup plus simple, et le rapport des dérivées $-\frac{1}{2(1+x)}$ tend vers $-\frac{1}{2}$. On en conclut que, pour $x=0$, l'expression proposée a pour valeur $(+e)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{e}{2}$.

Méthode de développement en série.

Posons
$$z=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
d'où
$$Lz=\frac{1}{x}L(1+x)$$
$$=\quad 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\cdots+(-1)^n\ \frac{x^n}{n+1}\ +\cdots\cdots$$
donc
$$z=e\ e^{-\frac{x}{2}}\ e^{\frac{x^2}{3}}\ e^{-\frac{x^3}{4}}\cdots\cdots\ e^{(-1)^n\frac{x^n}{n+1}}\cdots\cdots$$
$$=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{18}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^3}{4}+\frac{x^6}{32}-\cdots\right)\cdots$$
$$=e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{21}{48}x^3+\cdots\cdots\right)$$
On en déduit immédiatement que l'expression
$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$
a pour limite $-\frac{e}{2}$, et de même
$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{e}{2}x}{x^2}$$
a pour limite $\frac{11}{24}$ quand x tend vers 0.

— On trouverait de même que la limite de
$$\frac{(1+x)^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{e}}{x}$$
pour $x=0$ est $\frac{1}{2e}$.

Pour cela on développe $(1+x)^{-\frac{1}{x}}$ par le même procédé que précédemment et on trouve
$$(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{24}+\frac{5x^2}{48}\cdots\cdots\right)$$

Application du développement de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ — Formule de Stirling.

La formule de Stirling sert à calculer une valeur approchée du produit des n premiers nombres entiers. Posons pour cela
$$(1)\qquad 1.2.3\ldots\ldots n=n^n\,F(n)$$
nous avons aussi
$$(2)\qquad 1.2.3\ldots\ldots(n+1)=(n+1)^{n+1}\,F(n+1)$$

Je divise (2) par (1) j'en déduis

$$n+1 = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{F(n+1)}{F(n)}$$

ou

$$1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{F(n+1)}{F(n)}$$

Si n est infini $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est égal à e. Si n est très grand cette expression est égale à $e - \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n$ étant fonction de n et décroissant quand n augmente ; on a donc

$$F(n+1) = F(n)\,(e-\mathcal{E}_n)^{-1},$$

on a de même

$$F(n) = F(n-1)\,(e-\mathcal{E}_{n-1})^{-1}$$

$$F(2) = F(1)\,(e-\mathcal{E}_1)^{-1}$$

$$F(1) = (e-\mathcal{E}_0)^{-1}$$

on a donc

$$F(n+1) = \left[(e-\mathcal{E}_0)(e-\mathcal{E}_1)\cdots\cdots(e-\mathcal{E}_n)\right]^{-1}$$

qu'on peut noter

$$F(n+1) = e^{-(n+1)}\,F_1(n+1)$$

Nous poserons donc

$$(3) \qquad n! = n^n e^{-n} F_1(n)$$

Calculons maintenant une valeur plus approchée de $n!$ par la même méthode que précédemment

$$(4) \qquad (n+1)! = (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} F_1(n+1)$$

d'où en divisant (4) par (3)

$$1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \frac{F_1(n+1)}{F_1(n)}$$

$$\frac{F_1(n+1)}{F_1(n)} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2} + \cdots\cdots$$

Négligeons d'abord les termes qui suivent $\frac{1}{2n}$ et prenons

$$\frac{F_1(n+1)}{F_1(n)} = 1 + \frac{1}{2n}$$

Nous avons alors

$$\frac{F_1(n+1) - F_1(n)}{F_1(n)} = \frac{1}{2n}$$

$$\frac{F_1'(n+\theta)}{F_1(n)} = \frac{1}{2n}$$

Négligeons θ vis à vis de n que nous supposons très grand il vient

$$\frac{F_1'(n)}{F_1(n)} = \frac{1}{2n}$$

$$L\ F_1(n) = L\ c \cdot \sqrt{n}$$

c étant une constante. Nous avons donc avec plus d'approximation

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\ c$$

Pour avoir une formule encore plus approchée posons

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\ F_2(n)$$

nous avons

$$(n+1)! = (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}\ F_2(n+1)$$

d'où

$$1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\ \frac{F_2(n+1)}{F_2(n)}$$

$$F_2(n+1) = F_2(n)\ e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$= F_2(n)\ e\ \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} \cdots\cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2} \cdots\cdots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{12n^2}\right) F_2(n)$$

on a donc

$$\frac{F_2(n+1) - F_2(n)}{F_2(n)} = -\frac{1}{12n^2}$$

Si n est assez grand on pourra prendre

$$L\ F_2(n) = \frac{1}{12n} + c'$$

donc $F_2(n) = e^{\frac{1}{12n} + c'} = \left(1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right) e^{c'}$.

je m'arrête aux deux premiers termes du développement et je pose

$$F_2(n) = \left(1 + \frac{1}{12n}\right) G$$

G pouvant être considéré comme constant à partir de n assez grand. En effet j'ai

$$L\,F_2(n+1) - L\,F_2(n) = L\left(1 - \frac{1}{12n^2}\right) = -\frac{1}{12n^2} + \cdots\cdots$$

$$L\,F_2(n+2) - L\,F_2(n+1) = -\frac{1}{12(n+1)^2}$$

$$L\,F_2(n+p) - L\,F_2(n+p-1) = -\frac{1}{12(n+p-1)^2}$$

donc

$$L\,F_2(n+p) - L\,F_2(n) = -\left[\frac{1}{12n^2} + \cdots + \frac{1}{12(n+p-1)^2}\right]$$

ce qui montre que $F_2(n+p)$ tend vers une limite finie car la série du second membre est convergente, par conséquent G est une quantité finie. Stirling l'a calculée et il a trouvé que pour n infini G tendait vers $\sqrt{2\pi}$. On prendra donc la formule :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right)$$

On arriverait de la même façon à une formule encore plus approchée :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right) F_3(n)$$

$$(n+1)! = (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{2\pi(n+1)} \left(1 + \frac{1}{12(n+1)}\right) F_3(n+1)$$

$$1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{12n+13}{12n+1} \frac{12n}{12n+12} \frac{F_3(n+1)}{F_3(n)}$$

$$\frac{F_3(n+1)}{F_3(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} e \; \frac{12n+1}{12n+13}$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{12n+1}{12n+13}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2} + \frac{5}{48n^3} \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{13}{12n^2} - \frac{169}{144n^3} \cdots\right) = 1 - \frac{1}{144n^3} \cdots\cdots$$

On déduit aisément de là la valeur approchée

$$F_4(n) = \left(1 + \frac{1}{288n^2}\right) K$$

K étant une constante

La formule sera donc

$$n! = n^n \, e^{-n} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right)\left(1 + \frac{1}{288n^2}\right) K .$$

Remarque. Nous avons posé arbitrairement au début

$$n! = n^n F(n)$$

cherchons à obtenir directement n^n comme première approximation de la formule cherchée. Posons

$$n! = \varphi(n)$$

$$(n+1)! = \varphi(n+1)$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{\varphi(n)} = n$$

Si nous employions le même raisonnement que dans les autres cas nous aurions

$$(2) \qquad L\,\varphi(n) = \frac{n^2}{2} + \alpha$$

$$\varphi(n) = \beta \, e^{\frac{n^2}{2}}$$

Mais quand nous avons passé de (1) à (2) nous avons négligé θ vis à vis de n car nous avions

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \varphi'(n+\theta)$$

Or nous n'avons pas le droit de négliger une quantité finie quelque petite qu'elle soit, remplaçons en effet dans $e^{\frac{n^2}{2}}$, n par $n+\theta_1$ il vient

$$e^{\frac{(n+\theta_1)^2}{2}} = e^{\frac{\theta_1^2}{2}} \; e^{n\theta_1} \; e^{\frac{n^2}{2}}$$

et le coëfficient $e^{n\theta_1}$ croit indéfiniment avec n si petit que soit θ.

14ème Leçon

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. — Considérons le quotient de deux fonctions $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ et supposons que les deux fonctions f et φ augmentent indéfiniment lorsque x tend vers a, la valeur de la fraction, pour $x = a$, se présente sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Soit à chercher la limite de cette fraction lorsque x tend vers a; on peut ramener le problème au précédent en remarquant que la fraction donnée peut s'écrire

$\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$; pour $x = a$ elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Le rapport des dérivées est

$$\frac{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2$$

On voit donc que si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers une limite l, on a

$$l = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}\, l^2$$

Si l'on suppose que l ne soit ni nul ni infini, cette expression se réduit à

$$l = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Ceci est encore vrai lorsque $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers 0 ou augmente indéfiniment : je remarque tout d'abord qu'il suffit d'examiner le premier de ces deux cas, car le deuxième se ramène au premier en considérant au lieu de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Je suppose donc que $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tende vers 0; je considère l'expression auxiliaire $\frac{f(x)}{\varphi(x)} + G$ (G étant une constante).

Elle s'écrit encore $\frac{f(x) + G\varphi(x)}{\varphi(x)}$, elle a évidemment pour limite G, le théorème précédent est applicable à cette expression qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On a donc

$$G = \frac{f'(a) + G\varphi'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} + G$$

d'où il résulte que la limite de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ pour $x = a$ est 0, tout comme celle de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

La règle de l'Hospital est donc toujours applicable à une expression qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Autres formes indéterminées. — Si je considère une expression de la forme U^V, U et V étant deux fonctions d'une même variable, si pour une certaine valeur de cette variable U et V s'annulent simultanément, l'expression prend la forme 0^0 qui est indéterminée (la puissance 0 d'un nombre quelconque étant égale à l'unité, et une puissance quelconque de 0 étant égale à 0 ou à l'∞). De même cette expression peut prendre l'une des formes indéterminées ∞^0, 1^∞.

Pour chercher la vraie valeur d'une expression, on prend son logarithme qui est égal à

$$v\,L(u)$$

Ce logarithme se présente alors sous l'une des formes

$$0\,L(0) = (0) \times (-\infty)$$

ou $$0\,L(\infty) = (0) \times (\infty)$$

ou encore $$\infty\,L(1) = (\infty) \times (0)$$

qui se ramènent toutes à la forme $\frac{0}{0}$.

1er Exemple. Soit à chercher la vraie valeur de x^x pour $x = 0$.

Je pose $x^x = z$

D'où $$Lz = x\,L\,x = \frac{x}{\frac{1}{L(x)}}$$

Cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. — Le rapport des dérivées est $$\frac{1}{-\frac{1}{(Lx)^2}\,\frac{1}{x}} = -\frac{x}{\left(\frac{1}{Lx}\right)^2}$$

il se présente encore sous la forme $\frac{0}{0}$. Si l'on continue à prendre les dérivées successives on trouvera toujours la forme $\frac{0}{0}$, la fraction se multipliant par $\frac{1}{Lx}$, à chaque nouvelle dérivation.

On arrive immédiatement au résultat en posant

$$x = e^{-t}$$

lorsque x tend vers 0, t tend vers $+\infty$ et

$$\frac{x}{\frac{1}{Lx}} \text{ devient } \frac{e^{-t}}{\frac{1}{-t}} = -\frac{t}{e^t}$$

or $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2}$

Lorsque t tend vers $+\infty$, le quotient $-\frac{t}{1+t+\frac{t^2}{2}\ldots\ldots}$ tend évidemment vers 0.

Donc Lz tend vers 0 et z tend vers 1.

2ème Exemple. — Soit à chercher la valeur de $\left(\frac{tg\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, lorsque x tend vers 0.

Cette expression se présente sous la forme 1^∞ j'égale cette expression à z, on a

$$Lz = \frac{1}{x^2} L \frac{tg\,x}{x}$$

Je remplace $tg\,x$ par une valeur approchée en fonction de x,

$$tg\,x = x + \frac{x^3}{3}$$

(valeur que fait connaître le développement en série de $tg\,x$)

On a donc

$$\frac{tg\,x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + K$$

K contenant x^4 en facteur.

Je développe $L\left(1 + \frac{x^2}{3} + K\right)$. Il vient en négligeant les termes de degré supérieur au 4e

$$\frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{9}$$

alors $Lz = \frac{1}{x^2} L \frac{tg\,x}{x}$ tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque x tend vers 0 et z tend vers $e^{\frac{1}{3}}$. — On arrive plus simplement au même résultat en remarquant que

$$\left(\frac{tg\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \text{ a même limite que } \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

qui en diffère d'un infiniment petit d'ordre supérieur aux infiniment petits considérés.

Or $$\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{3}{x^2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Lorsque x tend vers 0, $\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ tend vers e, et l'expression proposée tend bien vers $e^{\frac{1}{3}}$.

3ème Exemple. — Soit à chercher la vraie valeur de $(\sin x)^{tg\,x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$. Je pose $x = \frac{\pi}{2} - z$ et je fais tendre z vers 0, j'ai

$$y = (\sin x)^{tg\,x} = (\cos z)^{\frac{1}{tg\,z}} = \left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^{\frac{\cos z}{\sin z}}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{z^2}{2} \cdots\cdots\right)^{-\frac{2}{z^2}}\right]^{-\frac{z^2}{2}\,\frac{1-\cdots\cdots}{z-\cdots\cdots}} = \left[\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)^{-\frac{2}{z^2}}\right]^{-\frac{z}{2}}$$

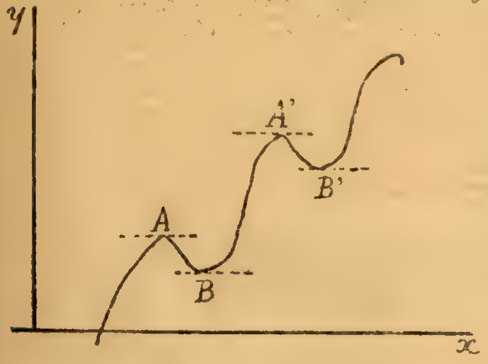
dont la limite est $e^0 = 1$.

15ème Leçon

Questions de maximum et de minimum

Définition. — On dit qu'une fonction y d'une variable x est maximum pour une valeur x_1 de la variable si la valeur correspondante de la fonction est supérieure à toutes les valeurs correspondant aux valeurs voisines de la variable ; ou, d'une façon plus précise, si l'on peut déterminer un nombre positif α (si petit qu'il soit) tel que sous la seule condition que h soit <u>en valeur absolue</u> inférieur à α, la valeur $f(x_1)$ soit supérieure à $f(x_1 + h)$. — Le minimum de la fonction se définit de façon analogue.

Il faut bien observer qu'un maximum ou un minimum ainsi défini n'est pas du tout la plus grande ou la plus petite valeur que puisse prendre la fonction.



C'est ainsi que si l'on considère l'ordonnée de la courbe ci-contre comme fonction de l'abscisse, les valeurs de y correspondant aux points A et A' sont des maxima ; ou des minima pour celles qui correspondent aux points B et B'.

Théorème. <u>La condition nécessaire</u>

et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ passe par un maximum ou un minimum pour une valeur x_1 de la variable, est que la première des dérivées successives de la fonction qui ne s'annule pas pour $x = x_1$ soit d'ordre paire.

En effet, il faut et il suffit que la différence $f(x_1+h)-f(x_1)$ ait un signe indépendant du signe de h, pour une valeur suffisamment petite de h, or on a

$$f(x_1+h)-f(x_1)= hf'(x_1) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_1) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x_1) + \cdots\cdots + R$$

Pour une valeur suffisamment petite de h, c'est toujours le 1er des termes de ce développement qui donne son signe. Ce signe reste donc invariable si le premier terme non nul du développement contient en facteur une puissance paire de h, c'est-à-dire si la 1ère dérivée non nulle est d'ordre pair.

Donc, dans le cas général, la fonction passe par un maximum ou par un minimum pour une valeur de la variable qui annule la dérivée sauf le cas particulier où la dérivée seconde est aussi nulle.–

On aura d'ailleurs un maximum si $f(x_1+h)-f(x_1)$ est négatif et un minimum dans le cas contraire. Cela dépend uniquement du signe de la 1ère dérivée non nulle. Si elle est négative pour la valeur x_1 de la variable, la fonction est maximum; elle est minimum dans le cas contraire.

Applications.–

Distance d'un point à une courbe.– Etant donné une courbe plane, trouver la plus courte ou la plus longue distance d'un point du plan à cette courbe.

Soit $f(x,y)$ l'équation de la courbe rapportée à deux axes rectangulaires et α, β les coordonnées du point donné. Le carré de sa distance à un point de coordonnées x et y de la courbe est

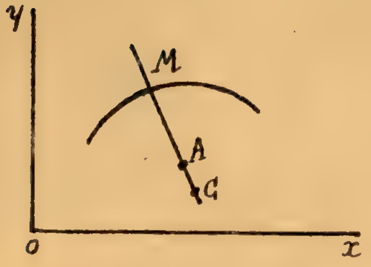
$$D^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

C'est bien là une fonction d'une seule variable, x par exemple, car y est défini comme fonction de x par l'équation de la courbe.

Annulant la dérivée de cette expression, il vient

$$(1) \quad (x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

Cette équation, jointe à l'équation $f(x,y) = 0$, définit les coordonnées d'un point M de la courbe; la droite AM est la



distance cherchée. Son coëfficient angulaire $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ est égal à $-\frac{dx}{dy}$, c'est celui de la normale à la courbe au point M.
Donc la plus courte ou la plus longue distance d'un point à une courbe s'obtient en menant du point une normale à la courbe.

Discussion. — Centre de courbure. — Cette distance est un maximum ou un minimum suivant que la dérivée seconde

$$(2) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

est positive ou négative. On en constatera le signe en donnant à x et à y les valeurs des coordonnées du point M.

Ceci posé, si l'on déplace le point A sur la droite AM, ce qui revient à faire varier β, l'expression (2) s'annulera pour une certaine valeur de β. Soit G le point correspondant. Pour toutes les positions du point A situé sur un des deux segments déterminés par G sur la droite AM, l'expression (2) sera positive et la distance au point M sera un minimum ; pour toutes les positions de A sur l'autre segment ce sera un maximum.

Pour le point G lui-même, dans le cas général, la distance à la courbe ne sera ni maximum ni minimum. Ce point G est dit centre de courbure. Son ordonnée β s'obtient en annulant l'expression (2). Il vient

$$y-\beta=\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$$

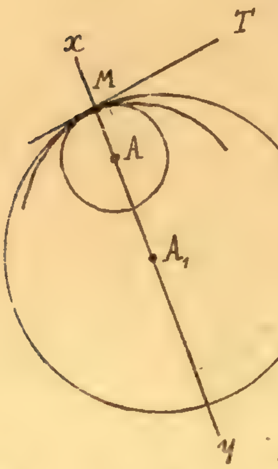
Portant dans l'équation (1) il vient

$$(x-\alpha)=+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\quad\frac{dy}{dx}$$

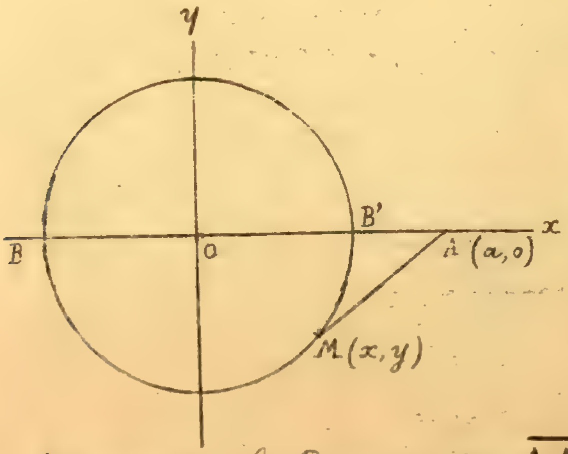
Le carré de la distance GM, qui est dite rayon de courbure est donc

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

Ces résultats peuvent être prévus géométriquement. Soit xMy la normale en M à la courbe que je suppose tourner sa concavité vers y. Pour toute position du point A sur le segment Mx, la distance AM est un minimum ainsi que pour toute position de A sur My suffisamment voisine de M pour que le cercle de centre A et de rayon AM soit intérieur à la courbe.



Le point A s'éloignant indéfiniment sur My, le rayon du cercle augmentera indéfiniment et le cercle tendra à se confondre avec la tangente MT à la courbe. Il finira donc pour une position A_1 de A par envelopper l'arc de courbe passant en M et alors A_1M sera un maximum. Le passage du premier cas au second se fera pour un certain point C centre d'un cercle ayant trois points communs infiniment voisins avec la courbe et comme tel la traversant en M. Le rayon de ce cercle sera une distance maximum à gauche de A_1M par exemple, une distance minimum à droite



Exemple. — Soient M un point mobile d'un cercle ayant pour centre l'origine et A un point donné sur l'axe des x, cherchons les positions du point M pour lesquelles AM est maximum ou minimum. On a

$$\overline{AM}^2 = (x-a)^2 + y^2 = R^2 + a^2 - 2ax$$

en tenant compte de l'équation du cercle qui est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

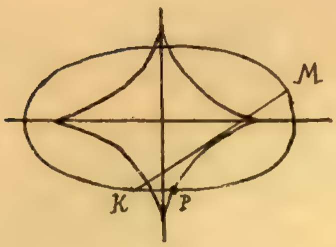
J'annule la dérivée de $\overline{AM}^2$ prise par rapport à x il vient

$$2a = 0$$

ce qui n'a pas lieu en général puisque le point A est donné et pourtant nous savons qu'il y a un maximum et un minimum pour les points $B\,B'$ où le cercle rencontre Ox ; c'est-à-dire pour $x = -R$ et $x = +R$. Cela tient à ce qu'on définit le maximum, par exemple, d'une fonction $f(x)$ pour une valeur α en

disant que la différence $f(a+h)-f(a)$ est toujours négative h étant très petit mais pouvant prendre une valeur positive ou négative. Or dans le cas précédent x ne peut être plus petit que $(a-R)$ donc h est toujours positif. On ne peut donc appliquer la règle générale pour reconnaître que AB est maximum.

Autre exemple. Soit une ellipse, un point M de cette ellipse ; je mène la normale MK limitée à son second point de rencontre avec la courbe. Cherchons le maximum ou le minimum de la longueur MK.



Soient x et y les coordonnées du point M, x', y' celles du point K ; on doit chercher le maximum ou le minimum de la quantité

$$(x-x')^2+(y-y')^2$$

Pour cela on annule sa différentielle

$$(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')=0$$

ou $$(x-x')dx+(y-y')dy+(x'-x)dx'+(y'-y)dy'=0$$

Or la somme des deux premiers termes est nulle, la droite MK étant normale en M, il faut donc simplement que la somme des deux derniers le soit, c'est-à-dire que MK soit normale en K ; MK doit donc être un axe de la conique.

On n'a pas ainsi toutes les solutions. — En prenant pour variable l'inclinaison de la normale sur l'axe, on verrait que l'on a encore des solutions correspondant aux normales aux points d'intersection de l'ellipse et de sa développée.

Seulement ces points ne peuvent être donnés par l'analyse précédente, vu que ce sont des points que ne peuvent franchir par une marche continue les extrémités des normales de part et d'autre desquelles on ne peut faire varier x ou x' d'une manière continue.

Cas d'une fonction de deux variables liées par une relation.

Soit une fonction $F(x,y)$ de deux variables x et y liées par la relation $\varphi(x,y)=0$. C'est en réalité une fonction d'une seule variable, x par exemple, y pouvant y être remplacée par sa valeur en fonction de x. Les raisonnements déjà faits lui sont applicables ; pour qu'il y ait maximum ou minimum il faut donc que la différentielle de F soit nulle :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0$$

Mais on doit avoir entre dx et dy la relation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = 0$$

tirant dy de la seconde le portant dans la première, on écrira que le coëfficient de dx est nul. Autrement dit l'équation qui donne le maximum ou le minimum est le résultat de l'élimination de dx et dy entre ces deux équations.

Généralisation. Ceci s'applique évidemment au cas d'une fonction $F(x_1 \ldots\ldots x_n)$ de n variables liées par $n-1$ relations ; l'équation qui donnera le maximum ou le minimum sera le résultat de l'élimination de dx_1, $dx_2 \ldots\ldots dx_n$ entre les n équations linéaires homogènes obtenues en annulant la différentielle de F, et différentiant les $n-1$ relations données.

Cette élimination peut se faire par la méthode des multiplicateurs.

On a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\,dx_n = 0$$

avec :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\,dx_n = 0$$

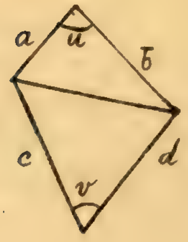
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}\,dx_n = 0$$

On multiplie respectivement les équations par les facteurs $\lambda_1, \ldots\ldots \lambda_n$ on écrit que dans la somme obtenue en les ajoutant le coëfficient de dx_1 est nul de même pour celui de $dx_2 \ldots\ldots$ etc.

On éliminera $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n$ entre les équations obtenues. On a fait ainsi basculer le système autour d'une diagonale.

Exemple Quel est le plus grand quadrilatère de quatre côtés donnés. Soient a, b, c, d les quatre côtés donnés, u et v deux angles opposés : le double de la surface est



$$ab \sin u + cd \sin v$$

et on a la relation

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos u = c^2 + d^2 - 2cd\cos v$$

Annulons les différentielles :

$$ab \cos u \, du + cd \cos v \, dv = 0$$
$$ab \sin u \, du - cd \sin v \, dv = 0$$

multipliant la seconde par λ, ajoutant et égalant à 0 les coëfficients de du et dv on a :

$$\cos u + \lambda \sin u = 0$$
$$\cos v - \lambda \sin v = 0$$

En égalant les deux valeurs de λ nous voyons que $\operatorname{tg} u = -\operatorname{tg} v$, les angles u et v sont supplémentaires donc quadrilatère inscriptible. Pour voir si on a alors un maximum ou un minimum il est plus commode de reprendre les calculs en écrivant les dérivées au lieu des différentielles :

$$ab \cos u + cd \cos v \ \frac{dv}{du} = 0$$

ou, tirant $\frac{dv}{du}$ de la relation :.... $ab \cos u + cd \cos v \ \frac{ab \sin u}{cd \sin v} = 0$

qui se réduit à $\quad abcd \ \frac{\sin(u+v)}{\sin v} = 0$

la solution est bien $u + v = \pi$

Prenons maintenant la dérivée seconde c'est :

$$ab \left[\frac{\cos(u+v)}{\sin v} \left(1 + \frac{ab \sin u}{cd \sin v}\right) + \sin(u+v) \left(\cdots\cdots\cdots \right) \right]$$

$\sin(u+v) = 0$, $\cos(u+v) = -1$ la dérivée seconde est négative. C'est un maximum.

Autre exemple.— Étant donné un ellipsoïde, chercher les axes d'une section centrale.

Le problème revient à chercher la plus courte et la plus grande distance du centre à un point de la courbe.

Soit l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

le plan $\quad lx + my + nz = 0$

On a à chercher le maximum ou le minimum de

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

x, y, z étant une solution des équations précédentes

Cherchons les 3 différentielles, et annulons-les

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0$$

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$$
$$x\,dx + y\,dy + n\,dz = 0$$

Pour éliminer dx, dy, dz je multiplie la première par λ, la deuxième par μ, j'ajoute et j'annule les coëfficients de dx, dy, dz

$$\lambda \frac{x}{a^2} + \mu l + x = 0$$

$$\lambda \frac{y}{b^2} + \mu m + y = 0$$

$$\lambda \frac{z}{c^2} + \mu n + z = 0$$

Multipliant respectivement par x, y, z et ajoutant on a

$$\lambda = -r^2$$

et le système devient :

$$\frac{(a^2-r^2)x}{a^2} + \mu l = 0$$

$$\frac{(b^2-r^2)y}{b^2} + \mu m = 0$$

$$\frac{(c^2-r^2)z}{c^2} + \mu n = 0$$

d'où
$$\frac{x}{\dfrac{a^2 l}{a^2-r^2}} = \frac{y}{\dfrac{b^2 m}{b^2-r^2}} = \frac{z}{\dfrac{c^2 n}{c^2-r^2}}$$

Et remplaçant x, y, z par des quantités proportionnelles dans

$$lx + my + nz = 0$$

On a finalement l'équation du 4ème degré aux carrés des longueurs des axes

$$\frac{a^2 l^2}{a^2-r^2} + \frac{b^2 m^2}{b^2-r^2} + \frac{c^2 n^2}{c^2-r} =$$

Fonctions de plusieurs variables

Quand une fonction de plusieurs variables passe par un maximum ou un minimum sa différentielle s'annule quels que soient les accroissements infiniments petits dx, dy, ... des variables indépendantes. Il faut donc que toutes les dérivées partielles de la fonction par rapport à ces variables indépendantes soient nulles.

Si on a une fonction de n variables $x_1 \ldots\ldots x_n$, liées par p relations, On tirera $dx_{n-p+1}, \ldots\ldots dx_n$ par exemple des p équations obtenues en différentiant les relations, on portera dans la différentielle de $F.(x_1 \ldots\ldots x_n)$ puis on annulera les coëfficients de $dx_1 \ldots\ldots dx_{n-p}$.

Autrement on annulera la différentielle de la fonction

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0$$

on différentiera les relations :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} dx_1 + \cdots\cdots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} dx_n = 0$$

On multipliera par des indéterminées, on ajoutera et dans la somme on annulera les coëfficients de $dx_1 \ldots\ldots dx_n$. On aura ainsi autant d'équations que de variables pour déterminer les points où il y a minimum ou maximum.

__Exemple__ : De tous les polygônes de n côtés inscrits dans un cercle quel est celui de plus grande surface.

Chaque triangle formé par un côté et les rayons des extrémités a pour surface en appelant φ_k l'angle au centre :

$$\frac{R^2}{2} \sin \varphi_k$$

Il faut rendre maximum la somme

$$\sin \varphi_1 + \cdots\cdots + \sin \varphi_n$$

sachant que $\varphi_1 + \cdots\cdots + \varphi_n = 2\pi$

Différentions : $\cos \varphi_1 \, d\varphi_1 + \cdots\cdots + \cos \varphi_n \, d\varphi_n = 0$

$$d\varphi_1 + \cdots\cdots + d\varphi_n = 0$$

multipliant la seconde par λ, nous voyons que l'on doit avoir

$$\cos \varphi_1 + \lambda = 0, \cdots\cdots\cdots, \cos \varphi_n + \lambda = 0$$

donc $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \cdots\cdots\cdots = \cos \varphi_n$

ou $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots\cdots\cdots = \varphi_n$

On voit que le plus grand polygône est le polygône régulier.

On aurait une solution analogue du problème : Quel est le

le plus petit polygône de n côtés circonscrit à un cercle.

Axes d'une surface du second degré. — Soit une surface du second degré rapportée à son centre :

$$ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy=1$$

Nous cherchons le maximum ou le minimum de

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

les différentielles annulées donnent

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$$

$$(ax+ny+mz)\,dx+(nx+by+lz)\,dy+(mx+ly+cz)\,dz=0$$

Multipliant la première par λ et ajoutant, on doit avoir

$$\begin{aligned} \lambda x+ax+ny+mz&=0\\ \lambda y+nx+by+lz&=0\\ \lambda z+mx+ly+cz&=0 \end{aligned}$$

En multipliant par x, y, z, et ajoutant on voit que $\lambda=-\frac{1}{r^2}$

Nous le remplaçons par sa valeur, nous éliminons x, y, z entre les équations obtenues et nous avons l'équation aux carrés des longueurs des axes :

$$\begin{vmatrix} a-\frac{1}{r^2} & n & m\\ n & b-\frac{1}{r^2} & l\\ m & l & c-\frac{1}{r^2} \end{vmatrix}=0$$

16ème Leçon

Distinction entre le maximum et le minimum. — Cette distinction pour les fonctions de plusieurs variables exige pour être faite l'application du théorème de Taylor à ces fonctions.

Théorème de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables.

Soit par exemple une fonction de deux variables $F(x,y)$. On sait que le développement de $F(x+h, y+K)$ ordonné suivant les

puissances croissantes de h et K est

$$F(x+h, y+K) = F(x,y) + h\frac{\partial F}{\partial x} + K\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^n F + R$$

R est le terme suivant de la série, dans lequel on remplace x et y par $x+\theta h$, $y+\theta K$ $(0<\theta<1)$.

Pour le démontrer je considère la fonction auxiliaire de t.

$$f(t) = F(x+ht, y+Kt)$$

Je la développe par la formule de Mac-Laurin.

$$F(x+ht, y+Kt) = F(x,y) + t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!} f^n(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta t)$$

Pour calculer la dérivée $f^p(0)$ nous considérerons $f(t)$ comme une fonction composée de t, les composantes étant $x+ht$, $y+Kt$ et nous avons :

$$f^p(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}K\right)^p F$$

Portant dans la formule et faisant $t=1$ on voit que l'on trouve bien le développement écrit précédemment.

Conditions dans lesquelles il y a minimum ou bien maximum.

Soit une fonction de deux variables $F(x,y)$ cette fonction sera maximum (minimum) pour les valeurs x_1 et y_1 des variables si la différence $F(x_1+h, y_1+K) - F(x_1, y_1)$ est négative (positive) quels que soient h et K pourvu qu'ils soient suffisamment petits.

Considérons la différence

$$F(x_1+h, y_1+K) - F(x_1, y_1)$$

En développant par la formule de Taylor, il vient

$$h\frac{\partial F}{\partial x_1} + K\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2Kh\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} + K^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\right] + \frac{1}{1.2.3}\left[\cdots\cdots\right.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de h et K, ce sont les termes du plus bas degré qui donnent leur signe à cette fonction ;

si $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ ne sont pas nuls tous deux, lorsqu'on change simultanément le signe de h et de K, la différence

considérée change de signe. Il faut donc déjà que $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ soient nuls ; s'il en est ainsi et que les trois quantités

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}$$

ne sont pas toutes les trois nulles (ce qui est le cas général) la différence considérée a même signe que

$$h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2hK \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} + K^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}$$

ou

$$h^2 \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2 \frac{K}{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{K^2}{h^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} \right\}$$

L'expression entre parenthèses est un trinôme du 2° degré de la variable $\frac{K}{h}$. Son signe n'est invariable que si ses racines sont imaginaires, c'est-à-dire si l'on a

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} < 0$$

C'est dans ce cas seulement qu'il y a maximum ou minimum. Ces conditions sont suffisantes, et il y a maximum si le signe commun de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ et de $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}$ est négatif, minimum si ce signe est positif

Si au contraire on a $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} > 0$

il n'y a ni maximum ni minimum.

<u>Cas exceptionnels.</u>

1° On peut avoir $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1} = 0$

le trinôme est alors un carré parfait $(Mh + NK)^2$ mais il ne s'ensuit pas que la différence considérée ait toujours le même signe car pour $\frac{K}{h} = -\frac{M}{N}$ le trinôme est nul. Ce sont les termes du 3ème ordre qui donnent leur signe et ce signe est variable pour $\frac{K}{h} = -\frac{M}{N}$ suivant les valeurs respectives de K et h.

Il n'y a donc ni maximum ni minimum.

Si les termes du 3ème ordre étaient nuls pour $\frac{K}{h} = -\frac{M}{N}$

ce seraient alors les termes du quatrième ordre qui donneraient leur signe, il pourrait y avoir maximum ou minimum .... etc ..... mais il faudrait [illegible] supplémentaire

2° Les dérivées partielles du second ordre peuvent être toutes nulles alors on examine les termes du 3ème ordre car ce sont eux qui donnent leur signe ..... etc ....

Distance d'un point à une surface.

Soit une surface qui, rapportée à trois axes rectangulaires, a pour équation :

$$z = f(x, y)$$

je considère la distance d'un point de coordonnées $\alpha\, \beta\, \gamma$ à un point de cette surface. — Son carré est

$$d^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

Pour que cette expression soit maximum il faut que ses dérivées

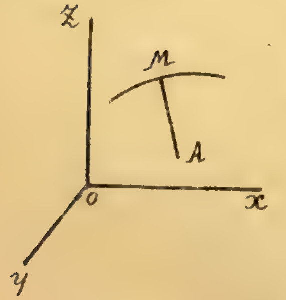
$$(1) \qquad (x-\alpha) + (z-\gamma)\frac{dz}{dx}$$

et

$$(2) \qquad (y-\beta) + (z-\gamma)\frac{dz}{dy}$$

soient nulles

Joignant ces deux équations à celle de la surface, on détermine un point M de la surface. Il est facile de voir que la droite AM est normale à la surface du point M. En effet les équations (1) et (2), où je considère $\alpha\, \beta\, \gamma$ comme coordonnées courantes, représentent cette droite ; ses cosinus directeurs sont proportionnels à $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ et -1 c'est-à-dire que cette droite est normale à la surface. Le segment AM n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum ; pour reconnaître s'il en est ainsi, je considère les dérivées secondes de la fonction



$$u = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

Pour simplifier leurs expressions, je pose

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x-\alpha) + p(z-\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (y-\beta) + q(z-\gamma)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + p^2 + r(z-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 + q^2 + t(z-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = pq + s(z-\gamma)$$

La condition pour qu'il y ait maximum ou minimum est

$$(3)\quad \left[pq+s(z-\gamma)\right]^2 - \left[1+p^2+r(z-\gamma)\right]\left[1+q^2+t(z-\gamma)\right] < 0$$

Ceci posé, si je suppose le point M donné et la position de A variable sur la normale AM, cette condition sera réalisée lorsque le point M sera sur une certaine partie de la droite et pas dans les autres cas. Les cotes des points qui limitent ces parties de la droite sont données par l'équation du 2e degré obtenue en annulant l'expression (3); c'est une équation du deuxième degré dont les racines sont réelles. En effet, si on fait $z=\gamma$, le binome se réduit à la valeur négative

$$-1-p^2-q^2$$

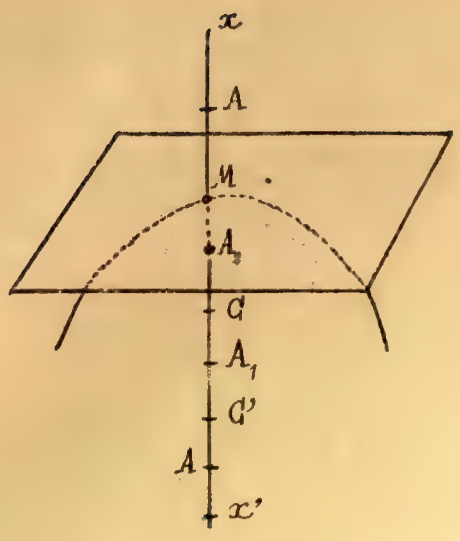
et si l'on donne à z l'une des valeurs qui annulent un des facteurs

$$1+p^2+r(z-\gamma) \quad \text{ou} \quad 1+q^2+t(z-\gamma)$$

il devient positif. Ce binome pouvant changer de signe a deux racines réelles. Le coëfficient du 1er terme de ce binome est (s^2-rt); si cette quantité est positive l'inégalité (3) est satisfaite toutes les fois que γ est compris entre les deux racines, c'est-à-dire toutes les fois que le point considéré est sur un segment donné.

Inversement, si cette quantité est négative, la condition est satisfaite par tous les points de la droite sauf pour ceux qui sont sur un segment donné.

Discussion géométrique. — Ces résultats peuvent être retrouvés par une étude géométrique.



Supposons d'abord la surface située tout entière d'un même côté de son plan tangent en M, du côté de la portion Mx' de la normale. Si l'on coupe par des plans passant par cette normale $x x'$ on obtiendra des courbes ayant pour normale en M la droite Mx' et tournant leur concavité du côté de Mx', c'est-à-dire, ayant un centre de courbure situé sur la portion Mx' de la droite ; soient C et C' ceux de ces centres qui sont l'un le plus rapproché, l'autre le plus éloigné de M.

Ceci posé, nous voyons que si l'on considère un point A situé sur la portion $C'x'$ de la droite, AM est un maximum pour toutes les courbes planes tracées sur la surface, c'est-à-dire est supérieur à la distance du point A à tous les points de la surface voisins de M, quelle que soit leur position autour de M. —

Si l'on considère ensuite un point A_1 situé entre C et C', la distance A_1M est un maximum pour certaines courbes passant par M et un minimum pour certaines autres, donc A_1M n'est ni un maximum ni un minimum pour la surface. —

Si nous considérons enfin un point A_2 situé sur MC ou A_3 situé sur Mx, la distance au point M est un minimum.

— Considérons en second lieu une surface de courbures opposées au point M ; c'est-à-dire telle qu'elle soit située de part et d'autre de son plan tangent en M. Je fais passer des plans par la normale au point M, ils coupent la surface suivant des courbes tournant leur concavité tantôt vers Mx', tantôt vers Mx.

Je considère d'abord toutes celles qui tournent leur concavité vers Mx', tous leurs centres de courbure sont situés sur le segment Mx'. Soit C celui de ces centres qui est le plus voisin de M ; soit C' celui des centres de courbure situés sur Mx et qui est le plus voisin de M.

Si l'on prend un point A situé entre C et C', en A_1 par exemple A_1M est évidemment un minimum pour toutes les courbes tournant leur concavité vers Mx, et aussi pour celles qui tournent leur concavité vers Mx', puisqu'il est situé entre M et leur centre de courbure. Si au contraire on prend un

point A_2 sur Cx' par exemple, A_2 est un minimum pour toutes les courbes tournant leur concavité vers Mx et pour un certain nombre de celles qui la tournent vers Mx', mais c'est un maximum pour toutes celles d'entre les dernières qui ont leur centre de courbure entre C et M.

Donc pour tout point situé entre C et C' la distance CM est un minimum, pour tous les autres ce n'est ni un maximum ni un minimum.

Remarque. — Dans un grand nombre de cas les résultats donnés par le calcul dans la recherche des maxima et minima peuvent se prévoir géométriquement.

Il s'agit de rendre une certaine fonction f maximum ou minimum. On sait qu'il faut $df = 0$. Quand df peut être calculé géométriquement en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, en égalant à 0 on conclut immédiatement.

Cette méthode s'applique immédiatement à la détermination de la plus courte distance d'un point à une courbe. — ainsi qu'aux exercices suivants :

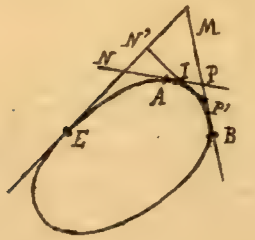
1° Étant donnée une courbe et deux points fixes A et B déterminer le point M de la courbe tel que MA + MB soit minimum.

2° Problème de la refraction d'un rayon lumineux en admettant que la lumière suive le chemin de temps minimum.

3° Quel est le plus grand polygone de n côtés inscrit dans une courbe fermée. — Pour résoudre cette question on suppose $n-1$ sommets fixés sur la courbe et on cherche quelle position le $n^{\text{ième}}$ doit occuper par rapport aux deux voisins pour que le polygone soit le plus grand. On trouve que la tangente au point cherché doit être parallèle à la droite des deux sommets voisins.

4° Quel est le plus petit polygone de n côtés circonscrit à une courbe fermée donnée. — On trouve que c'est celui pour lequel le point de contact de chaque côté soit au milieu de ce côté.

Pour obtenir ce résultat on suppose $n-1$ points de contact fixes et on cherche à disposer du $n^{\text{ième}}$ A de façon que le polygone soit minimum ; pour cela il faut que le triangle MNP enlevé par la tg. en A soit maximum.



On considère une position infiniment voisine de la tangente NP en N'P'. Pour que la position NP corresponde à un maximum il faut que l'accroissement du triangle qui est

tri IPP' — tri INN' soit nul aux infiniment

petits du second ordre près; les angles en I étant égaux, les triangles sont entre eux comme les produits

$$IP \times IP' \quad \text{et} \quad IN \times IN'$$. Il faut donc que

$$IP \times IP' - IN \times IN' = 0$$

ou en négligeant 1 infiniment petit d'ordre supérieur au premier $(\Delta . IP - \Delta . IN)$ on voit que l'on doit avoir

$$\overline{IP}^2 - \overline{IN}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad IP = IN \ .$$

Distinction du maximum et du minimum dans le cas de 3 variables.

On opère absolument comme pour une fonction de deux variables.

Soit la fonction $F(x, y, z)$, pour qu'il y ait maximum en $x_1\ y_1\ z_1$ il faut que $F(x_1 + h, y_1 + K, z_1 + l) - F(x_1, y_1 z_1)$ ait toujours même signe quels que soient $h, K\ l$ pourvu qu'ils soient infiniment petits.

Or en général on a

$$F(x_1 + h, y_1 + K, z_1 + l) - F(x_1 y_1 z_1) = h\frac{\partial F}{\partial x_1} + K\frac{\partial F}{\partial y_1} + l\frac{\partial F}{\partial z_1} + R$$

R étant infiniment petit par rapport aux termes écrits. Ces termes ne peuvent garder le même signe quand h, K, l varient. Il faut donc pour qu'il y ait maximum ou minimum que les trois dérivées soient nulles:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial z_1} = 0$$

Alors on écrit les termes du second degré en h, K, l. qui donnent leur signe, ce sont

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}h^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}K^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}l^2\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial z_1}lK + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial x_1}lh + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}hK$$

Il faut que cette forme quadratique des variables h, l, K, ait un signe constant. Autrement dit qu'elle soit une somme de 3 carrés de même signe. — On fera la décomposition en carrés par la règle de Gauss et on exprimera que cela a lieu.

17ème Leçon

17ème Leçon

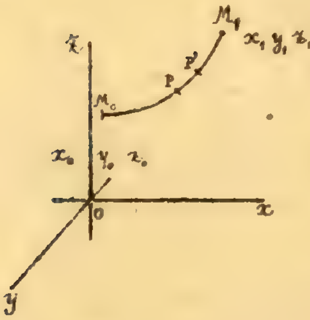
Différentielle de la longueur d'un arc de courbe.

On appelle longueur d'un arc de courbe la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dont le nombre des côtes augmente indéfiniment, chacun tendant vers 0.

Il faut démontrer que cette limite existe et qu'elle est indépendante de la loi de déformation des polygones inscrits.

Considérons une courbe rapportée à 3 axes rectangulaires.

Soit $M_0 M_1$ un arc fini de cette courbe. – Inscrivons dans cet arc une ligne polygonale et soit PP' un des côtés de cette ligne.



x, y, z étant les coordonnées du point P

$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z$ seront celles du point P'

On a alors

$$PP' = \sqrt{\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta y}^2 + \overline{\Delta z}^2} = \Delta z \sqrt{1 + \frac{\overline{\Delta x}^2}{\overline{\Delta z}^2} + \frac{\overline{\Delta y}^2}{\overline{\Delta z}^2}}$$

et comme les rapports $\dfrac{\Delta x}{\Delta z}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta z}$ tendent vers $\dfrac{dx}{dz}$, $\dfrac{dy}{dz}$

quand Δz tend vers 0, on peut écrire

$$PP' = \Delta z \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} + \varepsilon \right)$$

ε étant infiniment petit avec Δz, le périmètre est égal à la somme des côtés tels que PP' [illegible] et on a

$$P = \Sigma\, \Delta z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} + \Sigma\, \varepsilon\, \Delta z$$

faisons croître indéfiniment le nombre des côtes, chacun tendant vers 0, tous les ε sont alors infiniment petits, le plus grand η, comme le plus petit η' ; d'ailleurs $\Sigma\, \Delta z$ a une valeur finie qui est la différence des [illegible] des points M_0 et M_1 donc

$$\eta'(z_1 - z_0) < \Sigma\, \varepsilon\, \Delta z < \eta\, (z_1 - z_0).$$

Donc :
$$\lim \Sigma\, \varepsilon\, \Delta z = 0$$

Or la première partie de la somme qui forme p est la somme de quantités de la forme $F(z)\,\Delta z$ correspondant à un nombre infiniment grand de points de partage infiniment rapprochés de l'intervalle $z_1 - z_0$, car les termes sous le radical sont tous des fonctions de z, or on sait par la définition même de l'intégrale définie qu'une telle somme a une limite bien définie indépendante de la loi d'accroissement des points de partage et qui est

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\, dz \quad \text{ou} \quad \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\; dz$$

C'est par définition la longueur de l'arc MM'

Supposons maintenant que nous ayons un point M variable sur l'arc M_0M_1, l'arc M_0M a à chaque instant pour longueur en appelant x, y, z les coordonnées du point M

$$S = M_0M = \int_{z_0}^{z} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\; dz$$

Nous avons aussi un arc variable représenté par une fonction de z. Cette fonction a pour différentielle :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\; dz$$

C'est la différentielle de la longueur de l'arc de courbe

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,.\,dz = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

<u>Changements de coordonnées</u>. — Cherchons les différentes expressions de cette différentielle quand on emploie au lieu des coordonnées rectangulaires tout autre système.

Soit un système quelconque de coordonnées α, β, γ, définies en fonction des coordonnées x, y, z : on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha = f_1(x, y, z) \\ \beta = f_2(x, y, z) \\ \gamma = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

les formules de transformation pour passer du système Cartésien

à celui-ci s'obtiendront en tirant x, y, z de ces équations

$$(II) \quad \begin{cases} x = \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) \\ y = \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) \\ z = \varphi_3(\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}$$

Je vois que $\alpha = C^{te}$, $\beta = C^{te}$, $\gamma = C^{te}$ sont les équations de surfaces et qu'un point sera défini dans ce nouveau système par l'intersection de 3 telles surfaces ; une surface quelconque sera représentée par une équation entre α, β, γ ; une courbe par deux.

Pour voir ce que devient l'expression de la différentielle d'un arc de courbe dans ce système nous n'avons qu'à calculer dx, dy et dz

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \text{-----------}$$

$$dz = \text{-----------------}$$

Alors $ds^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2 + C\,d\gamma^2 + 2D\,d\beta\,d\gamma + 2E\,d\gamma\,d\alpha + 2F\,d\alpha\,d\beta$

Cette expression sera simple quand les coordonnées $\alpha\,\beta\,\gamma$ seront telles que $D = E = F = 0$

Pour étudier cette question désignons par la notation (α) les courbes obtenues en faisant $\beta = C^{te}$, $\gamma = C^{te}$ et faisant varier seulement α, ----- etc. c.à.d. la courbe intersection des 2 surfaces $\begin{cases} \beta = c^{te} \\ \gamma = c^{te} \end{cases}$ je l'appelle (α) .. etc

La condition nécessaire et suffisante pour que $F = 0$ c'est que les courbes (α) et (β) soient orthogonales.

En effet $$F = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}$$

Or dans $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ le symbole ∂x représente l'accroissement infiniment petit de x quand laissant β et γ constants on fait varier seulement α, c.à.d. l'accroissement de x quand on se déplace sur une courbe (α)

De même $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$; on voit donc que ces quantités sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente à la courbe (α) qui passe au point considéré.

De même $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$, $\frac{\partial z}{\partial \beta}$ sont proportionnelles aux cosinus

directeurs de la tangente à la courbe (β).

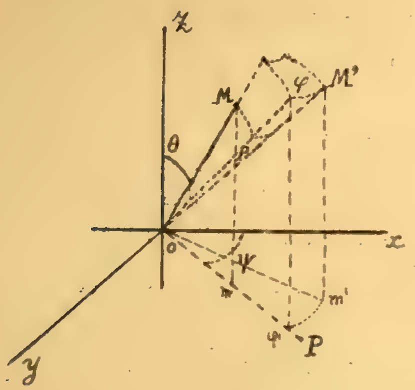
La condition $F=0$ ne fait donc qu'exprimer que ces deux courbes sont rectangulaires.

Donc pour que l'on ait à la fois $D=E=F=0$ il faut que les surfaces $\alpha = C^{te}$, $\beta = C^{te}$, $\gamma = C^{te}$ se coupent suivant des courbes 2 à 2 rectangulaires.

Les coordonnées polaires remplissent cette condition; aussi, peut-on vérifier facilement à l'aide des formules de transformation que dans ce système

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2$$

Cette formule peut d'ailleurs être écrite par une simple considération de figure.



Soit un point M d'un arc de courbe qui par un déplacement infiniment petit sur cet arc vient en M'

Nous pouvons supposer que ce déplacement s'opère en trois phases :

1°. une rotation du rayon vecteur dans le plan zOP de OM en OP on a

$$MP = \rho\, d\theta$$

2°. un allongement du rayon vecteur de OP en $O\varphi$.

$$P\varphi = d\rho$$

3°. une rotation du rayon vecteur $O\varphi$ autour de Oz pour venir en OM'

$$\varphi M' = \varphi m' = \rho \sin\theta\, d\psi .$$

en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Comme à la limite le contour $MP\varphi M'$ est tri rectangulaire

On a

$$MM'^2 = ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 .$$

Courbes tracées sur une surface

1 point sur une surface est défini par l'intersection de la surface avec deux autres surfaces, c'est-à-dire, si $\alpha = C^{te}$, $\beta = C^{te}$ représentent ces surfaces auxiliaires, seulement par les deux coordonnées α et β.

Ses coordonnées rectangulaires, x, y, z seront des fonctions de $\alpha\ \beta$

$$\text{I} \begin{cases} x = f_1\ (\alpha, \beta) \\ y = f_2\ (\alpha, \beta) \\ z = f_3\ (\alpha, \beta) \end{cases}$$

telles que l'élimination de α et β entre ces équations redonne l'équation de la surface donnée.

Pour avoir avec ces coordonnées α, β l'expression de la différentielle d'un arc de courbe tracée sur la surface, tirons dx, dy, dz des équations I et portons dans $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

nous trouvons $ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$

B sera nul si les courbes obtenues sur la surface en faisant $\alpha = C^{te}$ sont orthogonales à celles obtenues en faisant $\beta = C^{te}$.

En effet on a $B = \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta} + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}$

Et par le même raisonnement que précédemment on arrive à la conclusion énoncée.

Principe des cartes Géographiques. — Le problème des cartes consiste à représenter sur un plan les points d'une surface sphérique.

L'expression des coordonnées d'un point d'une surface en fonction de deux variables α et β résout la question de la façon la plus générale. En effet, soit un point de la surface ayant pour coordonnées α_1 et β_1 (ou dans la pratique deux fonctions quelconques de α_1 et β_1); je lui fais correspondre dans un plan un point défini par les mêmes deux nombres α_1 et β_1, pris comme coordonnées soit rectangulaires, soit polaires, etc - - - - - Pour que la représentation de la surface sur le plan soit le plus fidèle possible, il suffirait évidemment que les distances des points entre eux, les angles des courbes entre elles et les aires des surfaces soient conservées. Or ces trois conditions sont réalisées si les distances de deux points infiniment voisins quelconques se trouvent conservées.

En effet les distances infiniment petites se conservant, il en est de même pour les distances finies. Quant aux angles des courbes, on peut toujours les faire entrer dans un triangle infiniment petit, dont les trois côtés et par suite les angles se conserveront ; enfin les surfaces de tels triangles ne sont pas altérées, or toute surface peut-être décomposée en une série de triangles infiniment petits. Il en résulte immédiatement qu'une surface quelconque ne sera pas altérée.

En général une telle représentation est impossible.

Condition pour qu'une surface puisse être exactement représentée sur un plan.

Proposons-nous de chercher les conditions auxquelles doit satisfaire l'équation d'une surface pour que celle-ci puisse être représentée sur un plan par une figure dans laquelle les longueurs, les angles et les surfaces soient conservés.

On a vu précédemment que si l'on exprime les coordonnées d'un point de la surface à l'aide de deux variables arbitraires α et β, la condition nécessaire et suffisante cherchée s'exprime par la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv d\alpha^2 + d\beta^2 \qquad (1)$$

C'est en effet la cond. pour que la dist. d. 2 points soit conservée

Or on a :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta$$

La condition prend donc la forme

$$A\, d\alpha^2 + 2B\, d\alpha\, d\beta + C\, d\beta^2 \equiv d\alpha^2 + d\beta^2 \qquad (2)$$

les coëfficients A, B, C étant définis par les équations

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2$$

$$B = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}$$

$$C = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2$$

La condition (2) équivaut à

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 1$$

c'est-à-dire à

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0$$

Dérivant chacune de ces équations successivement par rapport à α et à β, il vient les 6 équations :

$$(I) \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$(II) \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

$$(III) \quad \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

$$(IV) \quad \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = 0$$

$$(V) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0$$

$$(VI) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}\frac{\partial y}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$$

Les équations V et VI devraient contenir six termes au lieu de trois, mais les trois qui n'ont pas été écrits ont une somme nulle pour l'équation V en vertu de l'équation II et pour l'équation VI en vertu de l'équation III.

Les équations I et V peuvent être considérées comme deux équations homogènes entre les 3 quantités $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}$ dont elles définissent les rapports ; si je considère de même les équations II et III, elles définissent de même les rapports des quantités $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}$ entre elles ; et les équations IV et VI définissent les rapports des quantités $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$ entre elles. Or, ces trois systèmes d'équations ont les mêmes coëfficients, donc les inconnues qu'elles définissent sont proportionnelles entre elles et l'on a

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}}{\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta}}$$

et

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}}{\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}}{\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta}}{\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2}}$$

Les premières relations expriment que les 3 fonctions $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$ $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial z}{\partial\alpha}$ ont leurs dérivées par rapport à α et à β proportionnelles; il s'ensuit (en vertu d'une propriété établie à la page 11) que ces 3 fonctions sont deux à deux dépendantes, c'est-à-dire qu'elles sont fonctions d'une même variable t.

Les dernières relations font de même voir que les 3 fonctions $\frac{\partial x}{\partial\beta}$ $\frac{\partial y}{\partial\beta}$ $\frac{\partial z}{\partial\beta}$ sont fonctions d'une même variable t'. Les variables t et t' ne sont pas indépendantes, puisque l'on a entre les fonctions précédentes de ces deux variables la relation

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\,\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\,\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0$$

Il en résulte donc que les six fonctions considérées sont fonctions d'une seule et même variable que je désigne par θ.

Mais on a pour toute surface

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

p et q désignant comme précédemment les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$

Si je suppose successivement β et α constant, j'en déduis les deux relations

$$(\text{VII}) \qquad \frac{\partial z}{\partial\alpha} = p\,\frac{\partial x}{\partial\alpha} + q\,\frac{\partial y}{\partial\alpha}$$

$$(\text{VIII}) \qquad \frac{\partial z}{\partial\beta} = p\,\frac{\partial x}{\partial\beta} + q\,\frac{\partial y}{\partial\beta}$$

Ce sont deux équations entre p, q et la variable θ. Eliminant celle-ci, elles donnent une relation entre p et q, de la forme

$$p = f(q)$$

c'est-à-dire que pour qu'une surface satisfasse aux conditions considérées il est nécessaire qu'elle soit développable, c'est-à-dire, que ce soit une surface réglée ayant même plan tangent tout le long d'une même génératrice.

Pour montrer que cette condition est suffisante, on peut avoir recours à des considérations géométriques qui consistent à considérer la surface comme la limite d'un polyèdre satisfaisant

constamment aux conditions.

Tout ce calcul suppose que chacun des 3 systèmes de deux équations à 3 inconnues que nous avons considérés détermine bien les rapports de ces trois inconnues entre elles.

Or ces systèmes sont tous les trois de la forme

$$u \frac{\partial x}{\partial \alpha} + V \frac{\partial y}{\partial \alpha} + W \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$$

$$u \frac{\partial x}{\partial \beta} + V \frac{\partial y}{\partial \beta} + W \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0$$

Ce système ne peut être indéterminé que si

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad \frac{\partial z}{\partial \beta}$$

sont proportionnels.

Or s'il en est ainsi c'est que x, y, z sont fonctions d'une seule et même variable ce qui est évidemment absurde.

De même, si les équations VII et VIII étaient identiques, le raisonnement serait en défaut ; mais alors les dérivées $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ seraient proportionnelles à $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial z}{\partial \beta}$, x et y, y et z, ne seraient pas indépendants, c'est-à-dire que la surface serait une courbe. ~~cylindre or on sait qu'un cylindre est une surface développable~~.

Représentation des surfaces non développables. —

Quand on a affaire à une surface non développable, ne pouvant en faire une représentation où les longueurs soient conservées et par suite les autres espèces de grandeurs ; on cherche des modes de représentation offrant d'autres avantages. — En pratique dans les cartes on s'attache en général sans rien conserver, à ne pas avoir de trop grandes déformations. Mais comme problèmes, nous nous proposerons de trouver des représentations qui conservent les angles par exemple ou bien les surfaces.

1° Représentations conservant les angles. — Soit une surface dont les points sont définis par deux coordonnées α et β on a

$$x = f_1(\alpha, \beta)$$
$$y = f_2(\alpha, \beta)$$
$$z = f_3(\alpha, \beta)$$

un point de la surface de coordonnées curvilignes α et β aura pour correspondant sur le plan de représentation un point de coordonnées rectangulaires α, β.

Si on considère un arc infiniment petit ds sur la surface et, l'arc correspondant $d\sigma$ sur le plan on a

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$$

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

pour que les angles soient conservés il faut qu'en chaque point le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ ait une valeur déterminée, dépendant des coordonnées du point considéré mais indépendante de la direction de la courbe envisagée sur la surface c'est-à-dire indépendante de $\frac{d\alpha}{d\beta}$

les conditions sont donc : $B = 0 \quad A = C$;

il faut que $\qquad ds^2 = \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2)$

λ ne dépendant que de α et β. — Le problème est possible d'une infinité de manières : si l'on considère le trinôme

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$$

qui a évidemment ses racines imaginaires, on peut le mettre sous la forme $\qquad (G + Hi)(G - Hi)$

G et H étant des fonctions linéaires de $d\alpha$ et $d\beta$.

Posons $\qquad \lambda(G + Hi) = du + i\,dv$

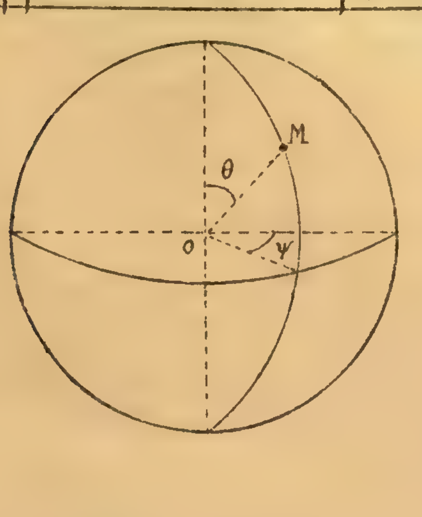
Ceci est toujours possible comme on le voit en Calcul Intégral

Alors on a $\qquad \lambda(G - Hi) = du - i\,dv$

et par conséquent $\qquad \lambda^2 ds^2 = du^2 + dv^2$

On a donc une solution du problème : on prendra comme coordonnées du point représentatif sur le plan les quantités u et v.

Application à la Sphère.



Nous prendrons comme coordonnées sur la sphère les angles θ et ψ, le premier étant le complément de la latitude, le second la longitude.

On a pour expression de la différentielle de l'arc de courbe sur la sphère

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2$$

Comme on le voit facilement par la considération d'un rectangle infiniment petit de diagonale ds,

ou par la transformation des coordonnées cartésiennes en ces nouvelles coordonnées.

On a donc $ds^2 = (d\theta + i \sin\theta\, d\psi)(d\theta - i \sin\theta\, d\psi)$
rendons $d\theta + i\sin\theta\, d\psi$ intégrable, le facteur λ sera ici évidemment $\dfrac{1}{\sin\theta}$

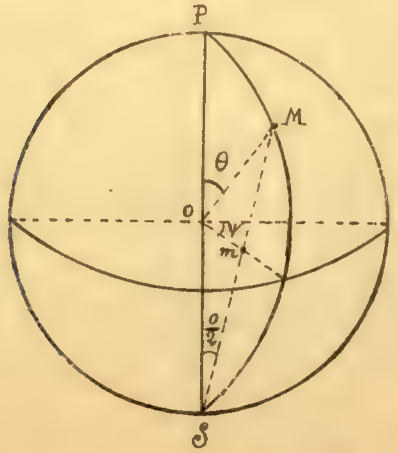
car $\dfrac{1}{\sin\theta}(d\theta + i\sin\theta\, d\psi) = \dfrac{d\theta}{\sin\theta} + i\,d\psi = dL\,tg\,\dfrac{\theta}{2} + i\,d\psi$

de même : $\dfrac{1}{\sin\theta}(d\theta - i\sin\theta\, d\psi) = dL\,tg\,\dfrac{\theta}{2} - i\,d\psi$

le produit sera donc $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\,ds^2 = \left(d.L.tg\,\dfrac{\theta}{2}\right)^2 + (d\psi)^2$

On n'aura donc qu'à prendre pour coordonnées cartésiennes du point représentatif sur le plan : $L\,tg\,\dfrac{\theta}{2}$ et ψ pour éviter un renversement des ordonnées sur le plan nous prendrons $L\cot g\,\dfrac{\theta}{2}$ ce qui n'a aucune influence sur la forme de ds^2.–

Nous arrivons ainsi à la carte de Mercator. Il existe d'autres cartes conservant les angles. Entre autres la carte de Ptolémée ou projection stéréographique :



le plan de représentation est le plan de l'équateur de la sphère. On y projette coniquement les points de la sphère le point de vue étant S ψ et θ étant les coordonnées d'un point de la sphère les coordonnées polaires du point correspondant du plan sont

$$\begin{cases} r = om = tg\,\dfrac{\theta}{2} \\ \omega = \psi \end{cases}$$

les coordonnées cartésiennes

$$x = tg\,\frac{\theta}{2}\cos\psi \qquad y = tg\,\frac{\theta}{2}\sin\psi$$

la différentielle de l'arc sur le plan est donc

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\cos\psi - tg\,\frac{\theta}{2}\sin\psi\, d\psi\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\sin\psi + tg\,\frac{\theta}{2}\cos\psi\, d\psi\right)^2$$

$$d\sigma^2 = \frac{d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}} + tg^2\frac{\theta}{2}\, d\psi$$

$$= \frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2\right) = \frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\; ds^2$$

la condition de conservation des angles est donc bien remplie.

18ème Leçon

Remarque sur le problème de la représentation des surfaces conservant les angles. — Dans le cas particulier de la sphère nous avons reconnu deux solutions : Celle de Ptolémée et celle de Mercator. Il y en a une infinité comme nous l'avons dit. On peut déduire chacune d'elles de la première : En effet reprenons le problème général :

Ayant la formule $ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$ nous avons mis ce binôme sous la forme :

$$(G + Hi)\,(G - Hi)$$

G et H étant des fonctions linéaires de α et β.

Or $G + Hi$ peut se mettre sous la forme $\lambda(du + i\,dv)$
$G - Hi$ .... $\lambda'(du - i\,dv)$

λ' étant imaginaire conjuguée de λ

On a alors $\quad ds^2 = \lambda\lambda'(du^2 + dv^2)$
le problème de la représentation de la surface en conservant les angles est résolu, u et v seront les coordonnées rectangulaires du point sur le plan.

Ayant cette solution on peut en avoir une infinité d'autres, car multipliant et divisant par $F'(u+iv).\,F'(u-iv)$, où F' est une fonction arbitraire :

$$ds^2 = \frac{\lambda\lambda'}{F'(u+iv).F'(u-iv)}\, F'(u+iv)(du+idv).F'(u-iv)(du-idv)$$

Or soit $F(u+iv)$ la fonction qui a pour dérivée par rapport à $u+iv$: $F'(u+iv)$ $\quad F(u-iv)$ a pour dérivée $F'(u-iv)$ par rapport à $u-iv$

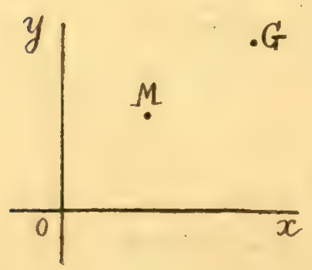
posant $F(u+iv) = P + i\,\varphi$. on voit que

$$ds^2 = G^2 \left(dP^2 + dQ^2\right)$$

G^2 étant un facteur ne dépendant que de u et v c'est-à-dire de α et β. Nous avons donc aussi une autre solution du problème : P et Q étant pris pour coordonnées du point sur le plan de représentation. Donc quand dans une application on aura une solution : u et v on aura les autres en choisissant arbitrairement des fonctions de $u + iv$: $P + Qi = F(u+iv)$ et prenant P et Q à la place de u et v.

Nous nous sommes appuyés pour démontrer l'infinité des solutions de ce problème de représentation et leur dépendance sur un théorème de Calcul Intégral que nous ne savons pas démontrer. (On peut toujours mettre le trinôme $M\,d\alpha + N\,d\beta + i(M'\,d\alpha + N'\,d\beta)$ sous la forme d'une différentielle exacte $\lambda(du + i\,dv)$ – Nous pouvons raisonner indépendamment de ce théorème.

<u>Démonstration directe</u>. – Soit un plan, le point M rapporté à deux axes rectangulaires et représentant le nombre imaginaire : $z = x + yi$



Considérons une fonction quelconque de z : $F(z) = P + Qi$ et soit G le point qui représente cette fonction pour $z = x + yi$, le point G correspond au point M. Si M varie dans le plan, G varie aussi.

Nous avons ainsi un mode de transformation des figures : à une figure formée de points M correspond une figure formée de points G. Cette transformation n'altère point les angles.

En effet : $F(z)$ satisfaisant à la définition des fonctions de variable imaginaire, le rapport $\dfrac{dP + i\,dQ}{dx + i\,dy}$ est indépendant de $\dfrac{dy}{dx}$

On peut donc poser : (I) $\dfrac{dP + i\,dQ}{dx + i\,dy} = M + Ni$, M et N n'étant fonctions que de x et y. – Mettons les imaginaires que nous avons là sous forme trigonométrique

$$dP + i\,dQ = R(\cos\varphi + \sin\varphi) = Re^{i\varphi}$$
$$dx + i\,dy \text{ - - - - - - - - - - - - - } = re^{i\omega}$$
$$M + iN \text{ - - - - - - - - - - - - - } = \rho e^{i\theta}$$

la formule (I) devient :

$$\frac{R}{r}\, e^{i(\varphi-\omega)} = \rho e^{i\theta}$$

on a donc : $\frac{R}{r} = \rho$ et $\varphi - \omega = \theta + 2K\pi$

Or R et r étant les modules des accroissements de $F(z)$ et z, mesurent les deplacements infiniment petits correspondants de M et de G et on voit que pour deux points correspondants $\frac{R}{r} = \rho$ indépendant de $\frac{dy}{dx}$. Par conséquent les angles en M se reproduisent en G.

La seconde relation $\varphi - \omega = \theta + 2K\pi$ montre que si on considère une figure infiniment petite au voisinage de M on a au voisinage de G une figure amplifiée comme on vient de le voir et de plus déviée d'un angle qui ne dépend que de la position de M ; c'est-à-dire une figure semblable.

Ceci nous montre que si les points M correspondent aux points d'une surface dans une représentation qui conserve les angles, les points G formeront une représentation de la surface ayant le même avantage. — Nous retrouvons donc là l'infinité des solutions et leur mode de dépendance.

Application. — Nous avons trouvé pour la sphère le système de représentation dit de Mercator : θ et ψ étant les coordonnées d'un point de la sphère

$x = L\,tg\,\frac{\theta}{2}$ et $y = \psi$ étaient les coordonnées du point correspondant sur le plan, le nombre imaginaire que ce point représente est $L.\,tg\,\frac{\theta}{2} + i\psi$

Formons une fonction quelconque de ce nombre imaginaire, soit :

$$e^{L.\,tg\frac{\theta}{2} + i\psi} = tg\,\frac{\theta}{2}\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$$

et les raisonnements précédemment faits nous montrent que nous pouvons prendre le point :

$$x = tg\,\frac{\theta}{2}\,\cos\psi$$

$$y = tg\,\frac{\theta}{2}\,\sin\psi$$

pour point représentant le point de la sphère, en conservant les angles.

Nous retrouvons ainsi le système de Ptolémée.

Autre application. — Soit la surface :

$$x = \rho\,\sin a\,\cos\psi$$
$$y = \rho\,\sin a\,\sin\psi$$
$$z = \rho\,\cos a$$

dont les points comme on le voit sont définis en fonction de deux variables ρ et ψ, a étant une constante. — Ces points sont d'ailleurs ceux d'un cône de révolution autour de Oz, puisque ρ ψ et a sont leurs coordonnées polaires où θ est remplacé par une constante.

Sur la surface on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2 a \, d\psi^2 \quad (\text{faisant } d\theta = 0 \text{ dans la formule générale})$$

$$= (d\rho + i\rho \sin a \, d\psi)(d\rho - i\rho \sin a \, d\psi)$$

$$= \rho^2 \left(\frac{d\rho}{\rho} + i \sin a \, d\psi\right)\left(\frac{d\rho}{\rho} - i \sin a \, d\psi\right)$$

$$= \rho^2 \left((d.L\rho)^2 + (d.\psi \sin a)^2\right]$$

Ce qui nous montre que en faisant correspondre au point de la surface de coordonnées ρ et ψ le point d'un plan qui a pour coordonnées cartésiennes : $x = L\rho$ et $y = \psi. \sin a$ nous aurons une représentation de la surface du cône qui conserve les angles.

Mais dans ce cas ce mode de représentation serait détestable puisque le cône est développable. — Cherchons d'autres solutions.

Pour cela formons une fonction quelconque de $L\rho + i\psi \sin a$

Soit par exemple :

$$e^{L\rho + i\psi \sin a} = \rho \left[\cos(\psi. \sin a) + i \sin(\psi. \sin a)\right]$$

Nous avons ainsi une nouvelle solution

$$X = \rho \cos(\psi \sin a)$$

$$Y = \rho \sin(\psi \sin a)$$

On peut facilement vérifier que dans ce cas on a sans facteur

$$ds^2 = dX^2 + dY^2$$

la représentation conserve les angles et les longueurs, elle n'est autre que le développement. —

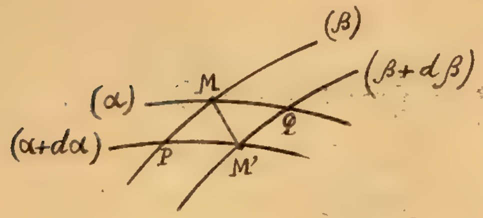
2° Représentation des Surfaces en conservant les aires.

Soient α et β les deux variables qui définissent les points d'une surface considérons les courbes correspondant à $\alpha = C^{te}$ et à $\beta = C^{te}$.

Deux courbes infiniment voisines du système α découpent avec deux courbes infiniment voisines du système β une aire infiniment petite que nous pouvons assimiler à un parallélogramme situé dans le plan tangent.

Cherchons à évaluer cet élément de surface.

Soit M de coordonnées α et β. les courbes (α) et (β) qui le définissent et les courbes infiniments voisines correspondant aux valeurs $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$ des variables. Cherchons l'aire du parallélogramme $MP\varphi M'$.



$$MP\varphi M' = MP . M\varphi \sin \widehat{PM\varphi}$$

l'arc infiniment petit de courbe sur la surface étant ds, on a

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$$

On voit que MP n'est autre chose que ds où l'accroissement de β, $d\beta = 0$, donc :

$$MP = \sqrt{A}\,d\alpha$$

de même : $$M\varphi = \sqrt{C}\,d\beta$$

pour évaluer $\sin M$, nous n'avons qu'à calculer directement MM' :

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2 - 2MP.\,PM' \cos MPM'$$

ce que nous pouvons écrire

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + C\,d\beta^2 + 2\sqrt{AC}\,d\alpha\,d\beta \cos \widehat{PM\varphi}$$

égalant à l'expression de ds^2 écrite plus haut, on a

$$\cos \widehat{PM\varphi} = \frac{B}{\sqrt{AC}}$$

d'où $$\sin PM\varphi = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{AC}}$$

et par conséquent la surface élémentaire que nous nous sommes proposé de calculer a pour valeur :

$$d\sigma = d\alpha\,d\beta\,\sqrt{AC - B^2}$$

<u>Autre Démonstration.</u> — Soit M, M', M'' 3 points infᵗ voisins sur la surface

M a pour coordonnées α, β

M' - - - - - - - - - - - - - - - - $\alpha + d\alpha,\ \beta + d\beta$

M'' - - - - - - - - - - - - - - - - $\alpha + \delta\alpha,\ \beta + \delta\beta$

Nous allons calculer le double de l'aire du triangle $MM'M''$; pour cela, nous calculerons les projections de cette aire sur les trois plans de coordonnées et nous ferons la somme de leurs carrés.

Les coordonnées des projections des points M, M', M'' sur le plan des xy sont :

pour M $\quad x, y$

pour M' $\quad x+dx, y+dy$ ou $\begin{cases} x + \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta \\ y + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta \end{cases}$

pour M'' $\quad x+\delta x, y+\delta y$ ou $\begin{cases} x + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} \delta\beta \\ y + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} \delta\beta \end{cases}$

le double de la projection de l'aire M M' M'' est donc

$$(d\alpha\,\delta\beta - d\beta\,\delta\alpha)\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)$$

On aura de même les autres projections, et finalement le carré du double de l'aire M M' M'' est

$$d\sigma^2 = (d\alpha\,\delta\beta - d\beta\,\delta\alpha)^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2\right]$$

Or en vertu de la formule de Lagrange la somme de 3 carrés que nous avons dans les crochets est égale à

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2$$

C'est-à-dire à $AC - B^2$ en conservant les notations employées dans l'expression de la différentielle de l'arc de courbe

On a donc la formule

$$d\sigma = (d\alpha\,\delta\beta - d\beta\,\delta\alpha)\sqrt{AC - B^2}$$

Nous passerons de cette formule à celle démontrée précédemment en supposant que les points M M' M'' sont deux à deux sur la même ligne de coordonnées, c'est-à-dire en faisant $d\beta = 0$ et $\delta\alpha = 0$.

Application à la Représentation des Surfaces. —

Soit une surface dont les points sont définis par les deux coordonnées α et β.

Prenons α et β comme coordonnées rectangulaires des points représentatifs sur le plan, la surface de l'élément découpé par les lignes de coordonnées sur le plan est : $(d\alpha, d\beta)$.

L'élément correspondant de la surface est : $\sqrt{(AC-B^2)}\, d\alpha.\, d\beta$.

Pour qu'il y ait équivalence il faut que $AC-B^2=1$

Et alors les éléments de surface correspondants étant équivalents il y aura équivalence pour les aires finies.

Il est souvent plus commode dans les applications de prendre pour coordonnées du point représentatif sur le plan non pas $x=\alpha$, $y=\beta$ mais $X=\varphi_1(\alpha,\beta)$, $Y=\varphi_2(\alpha,\beta)$

Alors si on considère un triangle quelconque infiniment petit sur la surface dont les sommets ont pour coordonnées

$$\alpha, \beta \;;\; \alpha+d\alpha,\ \beta+d\beta \;;\; \alpha+\delta\alpha,\ \beta+\delta\beta.$$

le double de l'aire du triangle est

$$(d\alpha\,\delta\beta - d\beta\,\delta\alpha)\sqrt{AC-B^2}$$

les points représentant les sommets du triangle sur le plan sont :

$$\begin{cases} X \\ Y \end{cases} ; \begin{cases} X+\dfrac{\partial X}{\partial\alpha}d\alpha+\dfrac{\partial X}{\partial\beta}d\beta \\ Y\ \dfrac{\partial Y}{\partial\alpha}d\alpha+\dfrac{\partial Y}{\partial\beta}d\beta \end{cases} ; \begin{cases} X+\dfrac{\partial X}{\partial\alpha}\delta\alpha+\dfrac{\partial X}{\partial\beta}\delta\beta \\ Y+\dfrac{\partial Y}{\partial\alpha}\delta\alpha+\dfrac{\partial Y}{\partial\beta}\delta\beta \end{cases}$$

le double de la surface du triangle sur le plan est donc :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha}\frac{\partial Y}{\partial\beta}-\frac{\partial X}{\partial\beta}\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)(d\alpha\,\delta\beta-d\beta\,\delta\alpha)$$

Pour qu'il y ait équivalence il faut que

$$\sqrt{AC-B^2}=\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha}\frac{\partial Y}{\partial\beta}-\frac{\partial X}{\partial\beta}\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\right)$$

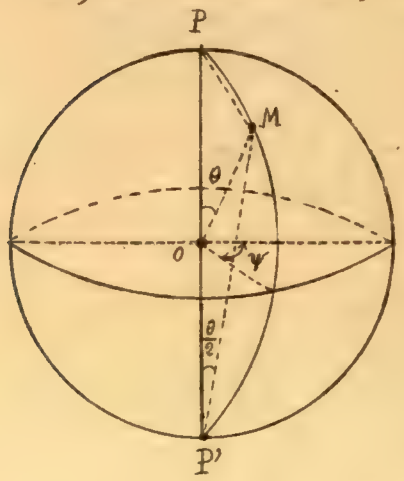
Application à la Sphère.— Définissons les points de la sphère par les deux variables déjà employées ψ et θ

$$\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\psi \\ y=R\sin\theta\sin\psi \\ z=R\cos\theta \end{cases}$$

prenons pour coordonnées des points du plan de représentation

$$\left.\begin{array}{l} \rho=2R\sin\frac{\theta}{2} \\ \omega=\psi \end{array}\right\} \quad \text{ou} \begin{cases} X=2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\psi \\ Y=2R\sin\frac{\theta}{2}\sin\psi \end{cases}$$

Ce qui revient à prendre pour rayon vecteur ρ du point sur le plan la distance du point correspondant sur la sphère au pôle P, et comme argument l'angle ψ.



On voit alors que l'élément de surface sur la sphère découpé par les lignes de coordonnées est

$$R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

et c'est précisément ce que l'on trouve en calculant l'élément correspondant de surface sur le plan c'est-à-dire la quantité

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\frac{\partial Y}{\partial \psi} - \frac{\partial X}{\partial \psi}\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right) d\theta . d\psi$$

Théorème général sur la représentation des surfaces.—

Quand on prend une surface quelconque et un mode de représentation quelconque, un cercle infiniment petit tracé sur la surface se transforme toujours en une ellipse.—

En effet sur la surface on a

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$$

Si nous faisons $ds = C^{te} = r$, nous avons une relation entre $d\alpha, d\beta$ qui représente un cercle infiniment petit sur la surface.

$$(\mathrm{I}) \quad r^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2$$

Or soient x et y les coordonnées du point représentatif sur le plan On a $x = \varphi_1(\alpha, \beta)$, $y = \varphi_2(\alpha, \beta)$

Donc :

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial x}{\partial \beta}\,d\beta \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial y}{\partial \beta}\,d\beta . \end{cases}$$

Si de ces équations on tire $d\alpha$ et $d\beta$ en fonction de dx et dy et que l'on remplace $d\alpha$ et $d\beta$ par leurs valeurs dans la relation (I), on aura une relation entre dx et dy qui représentera sur le plan la courbe correspondant au cercle infiniment petit considéré sur la surface.

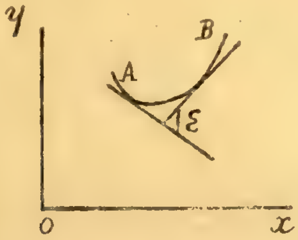
Cette relation étant du second degré représente une conique, qui évidemment est une ellipse, ce qui d'ailleurs se vérifie facilement par le calcul des coëfficients.

L'excentricité de cette ellipse sera une mesure des déformations produites par la représentation, c'est-à-dire de la défectuosité du système adopté. Plus elle se rapprochera du cercle, plus l'aire qu'elle limite se rapprochera de l'aire du cercle de la surface et plus le mode de représentation sera voisin de la perfection.

19ème Leçon

Courbure des lignes planes. — Rayon de courbure.

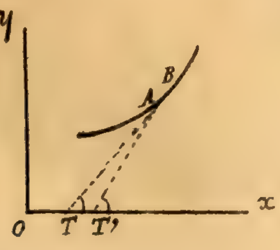
Considérons un arc AB d'une courbe plane, on appelle courbure de cet arc l'angle ε que font entre elles les tangentes à la courbe aux points A et B. —



On appelle courbure moyenne de l'arc AB le quotient $\dfrac{\varepsilon}{AB}$ de la courbure par la longueur de l'arc.

On appelle courbure en un point d'une courbe la courbure moyenne d'un arc infiniment petit de la courbe partant de ce point. — La courbure au point A est la limite du quotient $\dfrac{\varepsilon}{AB}$ lorsque le point B se rapproche indéfiniment du point A.

On reconnaît immédiatement que la courbure d'un cercle est constante et égale à l'inverse de son rayon. Donc il existe un cercle ayant la même courbure que la courbe proposée en A; son rayon est l'inverse de cette courbure, il est dit rayon de courbure de la courbe au point A; soit R. — R est la limite du quotient $\dfrac{\overline{AB}}{\varepsilon}$ lorsque le point B se rapproche indéfiniment du point A.



L'angle ε est la différentielle de l'angle de la tangente à la courbe avec une droite fixe. Nous prendrons l'axe des x. On aura donc, $\widehat{ATx}$ étant égal à $\left(\text{arc tg } \dfrac{dy}{dx}\right)$,

$$\varepsilon = d\left(\text{arc tg } \frac{dy}{dx}\right)$$

Quant à $\overset{\frown}{AB}$, c'est la différentielle de l'arc

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Mais
$$d\left(\text{arc tg } \frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Faisant le quotient, il vient

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

On retrouve pour le rayon de courbure l'expression du rayon du cercle osculateur.

Devant l'expression obtenue il faudrait mettre le signe ± à cause du radical du dénominateur. On convient de mettre toujours le signe + en acceptant aussi pour le rayon de courbure un signe variable d'un cas à un autre, qui est celui de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'expression trouvée pour R suppose que l'on prenne x comme variable indépendante ; nous obtiendrons une expression permettant de prendre une variable quelconque comme indépendante en remplaçant $\frac{d^2y}{dx^2}$ par la valeur générale $\frac{d^2y\, dx - dy\, d^2x}{dx^2}$ On a ainsi

$$\frac{1}{R} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Expression du rayon de courbure en fonction de l'arc. —

Prenons pour variable indépendante la longueur s de l'arc compris entre le point considéré et un certain point pris comme origine sur la courbe, et exprimons le rayon de courbure en fonction des dérivées

$$\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{d^2x}{ds^2} \quad \frac{d^2y}{ds^2}$$

La formule que l'on obtiendra peut être mise sous une infinité de formes différentes parce que ces quatre quantités ne sont pas indépendantes.

En effet on sait que l'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$(1) \quad \text{c. à. d.} \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

on en déduit en dérivant

$$(2) \qquad \frac{dx}{ds} \quad \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

On a quelle que soit la variable indépendante

$$R = \frac{(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} \qquad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

ou

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2)^3}$$

Quant à l'angle OMT, sa valeur nous est donnée par la formule connue

$$tg\, V = \frac{\rho}{\rho'\omega}$$

qui devient ici $tg\ OMT = \rho f'(\rho)$

La tangente, quand M se rapproche indéfiniment du point O, se confond avec l'arc à un infiniment petit du 3e ordre près. On a donc

$$OMT = \rho^2 f'(\rho) + \rho^3 K$$

Mais $f'(\rho)$ est une fonction de ρ qui diffère de sa valeur $f'(0)$ d'un infiniment petit comme le montre la formule de Taylor

$$f'(\rho) = f'(0) + \rho f''(0) + \frac{\rho^2}{2} f'''(0) + \cdots\cdots$$

On a donc

$$OMT = \rho f'(0)$$

a un infiniment petit du 2e ordre près

Par conséquent les deux angles OTM et MOT sont bien égaux à un infiniment petit du 2e ordre près.

Supprimé

---

divisant de part et d'autre par ds^6, il vient

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{dx}{ds}\ \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\ \frac{d^2x}{ds^2}\right]^2}{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^3}$$

Mais en vertu de la relation (1) le dénominateur est égal à l'unité.

Quant au numérateur, en le développant, il vient

$$(3)\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 - 2\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{d^2x}{ds^2}$$

De la relation (2), je déduis par élévation au carré

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + 2\,\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

L'expression (3) peut donc s'écrire

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Ce qui se réduit, en vertu de la relation (1), à

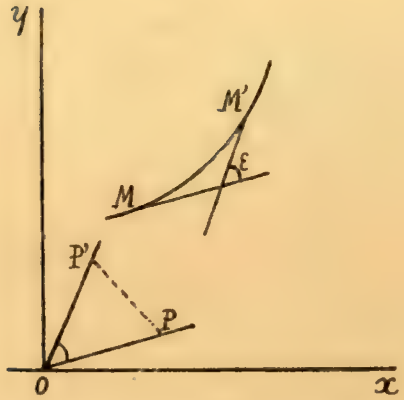
$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2$$

Il reste donc

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2$$

On peut obtenir cette formule directement de la manière suivante :

On a par définition $\quad \dfrac{1}{R^2} = \dfrac{\varepsilon^2}{\overline{MM'}^2}$



L'arc MM' est par hypothèse infiniment petit, c'est donc ds. Pour calculer ε, je mène par l'origine des droites OP et OP' parallèles aux tangentes à la courbe aux points M et M' et ayant pour longueur l'unité. On a évidemment

$$PP' = 2\,\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

PP' est donc égal à ε à un infiniment petit du 3ᵉ ordre près. Si je désigne par x, y les coordonnées du point M, l'équation de la droite OP est $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{dy}{dx}$.

Il en résulte immédiatement que les coordonnées du point P sont

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

c'est-à-dire encore

$$\frac{dx}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds}$$

Le point P' étant obtenu en donnant à s un accroissement infiniment petit, ses coordonnées sont

$$\frac{dx}{ds} + d\left(\frac{dx}{ds}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} + d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

On en déduit :

$$PP'^2 = \mathcal{E}^2 = \left[d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]^2$$

et par suite

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\left[d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]^2}{ds^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Développées des courbes planes.

Soit M un point d'une courbe plane. A ce point correspond un rayon de courbure. Si l'on porte sur la normale au point M du coté de la concavité de la courbe une longueur égale au rayon de courbure, on obtient le centre de courbure relatif au point M.

La développée de la courbe est le lieu des centres de courbure.

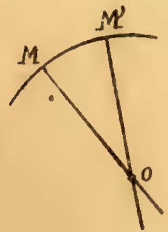
La développée d'une courbe jouit de deux propriétés principales :

1° La tangente à la développée est normale à la courbe

2° La longueur d'un arc de développée est égale à la différence des rayons de courbure des points de la courbe qui correspondent à ses extrémités.

I°. — Le premier théorème est presque évident : En effet soit le point M sur une courbe et le point infiniment voisin M'. On peut assimiler l'arc de courbe infiniment petit MM' à un arc de cercle et alors les deux normales en M et en M' se coupant en O on a

$$MM' = OM \times \widehat{MOM'}$$



$$\text{donc} \quad \frac{\widehat{MOM'}}{MM'} = \frac{1}{OM}$$

On voit donc que OM est le rayon de courbure de la courbe en M ; donc deux normales infiniment voisines se coupent sur la développée. La développée est l'enveloppe des normales.

Vérifions cette propriété par le calcul. On sait que l'on nomme cercle de courbure d'une courbe en un point, le cercle décrit du centre

de courbure correspondant comme centre avec le rayon de courbure pour rayon. On sait que ce cercle de courbure est le cercle osculateur de la courbe au point considéré c'est-à-dire le cercle qui a avec la courbe en ce point le contact d'ordre le plus élevé, du 2ème ordre. Nous allons définir le centre de courbure comme centre du cercle osculateur.

Soit le cercle $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ (I)

pour qu'il soit osculateur à la courbe au point de coordonnées x, y, il faut 1° qu'il passe en ce point ce qui est exprimé par l'équation (I)

2° qu'en ce point le $\frac{dy}{dx}$ du cercle soit celui de la courbe, donc que (II) $(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx}$ étant tiré de l'équation de la courbe

3° qu'il en soit de même pour $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\text{(III)} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

les conditions II et III déterminent le centre de courbure une fois que l'on a remplacé $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs en fonction de x et y tirées de l'équation de la courbe. On aura donc le lieu du centre de courbure c'est-à-dire la développée en éliminant x et y entre ces équations et l'équation de la courbe.

Les équations II et III définissent donc la développée en fonction du paramètre x par exemple si dans l'équation de la courbe on prend x comme variable indépendante.

Pour avoir la tangente à la développée nous n'avons qu'à différentier ces équations pour en tirer $d\alpha$ et $d\beta$ en fonction de x.

La première donne

$$(dx - d\alpha) + dy\frac{dy}{dx} - d\beta\frac{dy}{dx} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}dx = 0$$

Or on a en vertu de la seconde

$$dx + dy\frac{dy}{dx} + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}dx = 0$$

donc on voit sans achever le calcul de $d\alpha$ et $d\beta$ que :

$$d\alpha + d\beta\frac{dy}{dx} = 0$$

Donc l'on a entre le coëfficient angulaire $\frac{d\beta}{d\alpha}$ de la tangente à la développée et celui $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à la courbe la relation de perpendicularité.

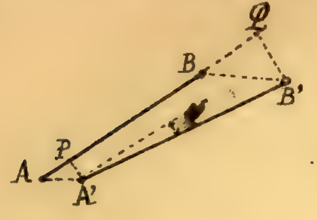
D'ailleurs sans tout ce raisonnement on voit bien que les équations

II et III qui définissent la développée sont, la première l'équation de la normale à la courbe et la seconde la dérivée de cette équation par rapport au paramètre x. Donc les deux équations définissent aussi bien l'enveloppe des normales à la courbe.

II°. — Démontrons maintenant la seconde propriété énoncée sur les développées :

La longueur d'un arc de développée est égale à la différence des rayons de courbure correspondant aux extrémités.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :



Quand une droite AB se déplace en changeant de longueur, la variation de longueur produite dans un déplacement infiniment petit s'exprime simplement en fonction des déplacements des extrémités. — Soit en effet AB la position initiale et A'B' la position infiniment voisine. Soit PQ la projection de A'B' sur AB.

On a $PQ = A'B' \cos\varphi$ en désignant par φ l'angle de A'B' avec AB ; or cet angle est infiniment petit ; son cosinus diffère de l'unité par un infiniment petit du second ordre. Donc en se bornant aux infiniment petits du premier ordre on voit que

$$A'B' = PQ., \text{ donc :}$$

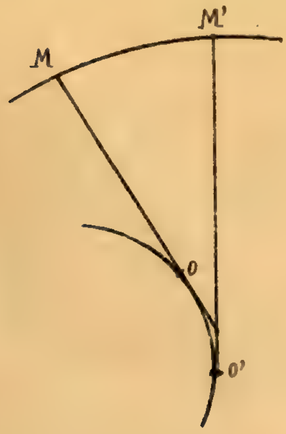
$$A'B' - AB = PQ - AB = BB' \cos(BB'.AB) + AA' \cos(AA'.BA)$$

L'accroissement de longueur est la somme des déplacements des extrémités multipliés respectivement par les cosinus des angles de ces déplacements avec le segment primitif.

Considérons maintenant une courbe et sa développée.

Soit M, M' deux points de la courbe ; OM et O'M' les normales en ces points et O, O' leurs points de contact avec la développée.

Je suppose que l'on amène la normale OM en O'M' par une série de déplacements infiniment petits. La différence O'M' − OM sera égale à la somme des variations de longueur infiniment petites de la droite dans chacun de ces déplacements. Or l'extrémité M décrit une trajectoire normale à la droite et l'extrémité O une trajectoire à laquelle elle est tangente, donc chacune de ces variations de longueur infiniment petites se réduit à un arc infiniment petit de la développée parcourue par le point O, et leur somme,



c'est-à-dire la différence O'M' − OM, est égale à l'arc OO'.

Ce résultat peut être établi par le calcul de la manière suivante. La longueur OM qui est égale au rayon de courbure est donnée par l'équation :

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

J'en déduis en différentiant

$$R\,dR = (x-\alpha)(dx-d\alpha) + (y-\beta)(dy-d\beta)$$

Mais $(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy$ est nul d'après l'équation

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

qui sert à définir les coordonnées α et β.

Il reste donc

$$dR = -\frac{(x-\alpha)}{R}\,d\alpha - \frac{(y-\beta)}{R}\,d\beta \qquad (1)$$

Or $\frac{x-\alpha}{R}$ et $\frac{y-\beta}{R}$ (différence des coordonnées de deux points d'une droite divisée par leur distance) sont les cosinus des angles de la normale avec Ox et Oy. Ils sont donc égaux aux cosinus des angles de la tangente à la développée avec les axes. Or ceux-ci sont

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}} \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}}$$

ils s'écrivent encore en désignant par σ l'arc de la développée

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{d\beta}{d\sigma}$$

Portant dans la relation (1), il vient

$$dR = -\frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{d\sigma} = -d\sigma$$

On a donc $dR + d\sigma = 0$

ou $R + \sigma = C^{te}$.

C'est-à-dire que si l'on considère un point fixe O' sur la dévelop-pée et une normale quelconque OM, la somme des longueurs de cette normale OM et de l'arc OO' est une longueur constante qui est nécessairement la normale O'M'. On a donc bien

$$O'M' = OO' + OM$$

ou $$OO' = O'M' - OM.$$

Développantes d'une courbe plane. — De ce dernier théorème on peut déduire une génération des courbes planes. Si l'on suppose un fil flexible et inextensible appliqué sur la développée jusqu'à un certain point quelconque O à partir duquel il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'au point M où il coupera la courbe proposée, qu'ensuite on développe la partie enroulée en tenant toujours le fil tendu son extrémité M se déplacera sur la courbe donnée la courbe est alors décrite comme développante de sa développée.

Une courbe a une infinité de développantes. Au lieu de terminer le fil en M, on aurait pu le terminer en tel point de OM qu'on aurait voulu. D'ailleurs la longueur OM enroulée sur la développée aurait conduit à un certain point A de cette développée. On peut dire que la développante est obtenue en portant sur les tangentes à la développée à partir de leur point de contact des longueurs égales aux arcs de développée compris entre ces points de contact et une origine arbitrairement fixée A.

On voit alors que x, y désignant les coordonnées courantes de la développée, les équations d'une développante sont

$$X = x - s \frac{dx}{ds}$$

$$Y = y - s \frac{dy}{ds}$$

la constante arbitraire se trouve alors implicitement contenue dans s.

Vérifions sur ces équations que la tangente à la développante est perpendiculaire à la tangente correspondante à la développée.

On a en prenant s comme variable indépendante

$$dX = - s \frac{d^2x}{ds^2} ds$$

$$dY = - s \frac{d^2y}{ds^2} ds$$

On aura donc $dx\, dX + dy\, dY = 0$ car :

$$\frac{dx\, d^2x}{ds^2} + \frac{dy\, d^2y}{ds^2} = ds \left[\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2}\right] = 0$$

On peut objecter que dans cette vérification on a pris s comme variable indépendante. En prenant les formules générales, on aurait eu une écriture différente ; plus longue, mais les mêmes résultats comme on peut facilement s'en assurer.

20ème Leçon

Rayon de courbure de la développante d'une courbe donnée. —

Soient x et y les coordonnées d'un point de la courbe donnée, on sait que le point correspondant de la développante a pour coordonnées.

$$X = x - s \frac{dx}{ds}$$

$$Y = y - s \frac{dy}{ds}$$

où nous considérons s comme variable indépendante.

Pour avoir le rayon de courbure de la développante, nous devons calculer dX, dY et d^2X, d^2Y

$$dX = \frac{dx}{ds} ds - ds \frac{dx}{ds} - s \frac{d^2x}{ds^2} ds = -s \frac{d^2x}{ds^2} ds$$

$$dY \text{ - } = -s \frac{d^2y}{ds^2} ds$$

$$d^2X = -\frac{d^2x}{ds^2} ds^2 - s ds^2 \frac{d^3x}{ds^3}$$

$$d^2Y = -\frac{d^2y}{ds^2} ds^2 - s ds^2 \frac{d^3y}{ds^3}$$

Portons ces valeurs dans la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dX d^2Y - dY d^2X}{(dX^2 + dY^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{s^2 ds^3 \left[\frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{d^2y}{ds^2} \frac{d^3x}{ds^3}\right]}{s^3 ds^3 \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Pour simplifier cette écriture tenons compte des relations qui existent entre les dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2} \text{ ..... etc.}$$

Nous avons.

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \qquad (I)$$

d'où en différentiant

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \qquad (II)$$

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^3y}{ds^3} + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = 0 \qquad (III)$$

la relation II nous donne :

$$\frac{-\frac{dx}{ds}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}}$$

et nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left(\frac{dx}{ds}\,\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^3y}{ds^3}\right)\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}}{s.\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

En tenant compte de la relation III :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}}$$

Et finalement on a en faisant intervenir les relations (I) et (II)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{s}$$

formule qui était prévue <u>par la définition</u> même de la développante.

Différence entre un arc infiniment petit et sa corde

Nous avons vu que l'arc infiniment petit et sa corde étaient des infiniment petits équivalents. — Nous allons montrer que leur différence est un infiniment petit du 3ème ordre. —

Soit un arc infiniment petit $MM' = ds$ soient x, y les coordonnées du point M, celles du point M' sont

$$x' = x + \frac{dx}{ds}\,ds + \frac{d^2x}{ds^2}\,\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$y' = y + \frac{dy}{ds}\,ds + \frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

la corde c a donc pour valeur

$$c^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$$

$$= \left[\frac{dx}{ds}ds + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds^2}{2} + \cdots\right]^2 + \left[\frac{dy}{ds}ds + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds^2}{2} + \cdots\right]^2$$

$$= ds^2\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] + 2ds^3\left[\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right] + ds^4 \times K + \cdots$$

En cherchant le coëfficient de ds^4 on trouve $K = \frac{-1}{12\rho^2}$ ρ étant le rayon de courbure.

Or en vertu des relations connues. ceci se réduit à

$$c^2 = ds^2 - \frac{ds^4}{12\rho^2}$$

$$c = ds\sqrt{1-\frac{ds^2}{12\rho^2}} = ds\left(1-\frac{ds^2}{24\rho^2} + \cdots\cdots\right)$$

d'où $$ds - c = \frac{ds^3}{24\rho^2}$$

la différence entre l'arc et la corde est donc bien un infiniment petit du 3.e ordre.

Application. — Cycloïde

Avant de passer à l'application des résultats trouvés à la cycloïde nous allons nous occuper du mouvement d'une figure plane dans son plan, puisque c'est un tel mouvement qui définira cette courbe.

Soit une figure plane de forme invariable se déplaçant dans son plan; nous pouvons dédoubler le plan de la figure et considérer ce mouvement comme celui d'un plan mobile contenant la figure et dont tous les points sont invariablement liés aux points de cette figure, glissant sur un plan fixe.

En général, à chaque instant un point du plan mobile se trouve immobile pendant un temps infiniment court suivant l'instant considéré, autrement dit se trouve avoir une vitesse nulle à cet instant, on dit que ce point est à ce moment centre instantané de rotation. —

Rapportons les points du plan mobile à deux axes rectangulaires dans le plan fixe, les coordonnées x, y d'un point déterminé dans le plan mobile sont alors fonction du temps t, et les dérivées $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$ représentent à chaque instant les composantes suivant les axes de la vitesse du point.

Pour la position du plan mobile correspondant à un instant déterminé ces composantes u et v ont des valeurs qui varient suivant la position du point dans le plan. Donc à un moment déterminé, u et v sont des fonctions déterminées de x et y nous allons chercher la forme de ces fonctions, nous allons trouver une forme générale indépendante du moment considéré, mais dans laquelle les coëfficients de x et y dépendront du moment considéré.

Pour cela considérons le plan mobile au moment t_0 et dans ce plan deux points dont les coordonnées par rapport aux axes fixes choisis sont x, y et x', y'. Soit l la distance qui les sépare

$$l^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$$

Cette distance étant toujours la même, son accroissement dl correspondant à l'accroissement de temps dt_0 est nul, on a donc :

$$(x'-x)\left[\left(\frac{dx'}{dt_0}\right) - \left(\frac{dx}{dt_0}\right)\right] + (y'-y)\left[\left(\frac{dy'}{dt_0}\right) - \left(\frac{dy}{dt_0}\right)\right] = 0$$

Supposons que l ait été pris infiniment petit, alors $x'-x = dx$, $y'-y = dy$ et les parenthèses représenteront les accroissements des composantes u_0 et v_0 de la vitesse au temps t_0 quand on passe du point x, y du plan au point infiniment voisin, la relation devient

$$dx\, du_0 + dy\, dv_0 = 0$$

Or u_0 et v_0 sont des fonctions déterminées de x et y. Donc

$$du_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u_0}{\partial y}\, dy$$

$$dv_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v_0}{\partial y}\, dy$$

Portons dans la relation

$$dx\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u_0}{\partial y}\, dy\right) + dy\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v_0}{\partial y}\, dy\right) = 0$$

Ceci doit avoir lieu quelque soit $\frac{dy}{dx}$ c'est-à-dire quelle que soit la direction envisagée autour du point x, y. On doit donc avoir

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

la première équation montre que u_0 est indépendant de x
la deuxième que v_0 est indépendant de y.
Alors $\frac{\partial v_0}{\partial x}$ est indépendant de y; donc $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ aussi donc

$$u_0 = ay + b = a(y-\beta)$$

de même $$v_0 = -ax + b' = -a(x-\alpha)$$

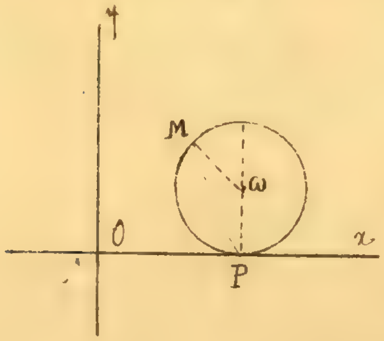
les constantes a, β et α étant déterminées au moment t_0 considéré, mais dépendant de ce moment en général.

On voit donc qu'au temps t_0 un point du plan, le point (α, β) a une vitesse nulle. C'est le centre instantané de rotation et l'on voit que la vitesse et par conséquent le déplacement infiniment petit d'un point du plan est normal au rayon qui joint ce point au centre de rotation car on a

$$u_0(x-\alpha) + v_0(y-\beta) = 0$$

Cycloïde. — La cycloïde est la courbe décrite par un point d'une circonférence qui roule sur une droite sans glissement.

Dans ce mouvement du plan de la circonférence, le centre instantané de rotation est à chaque instant le point de contact de la circonférence et de la droite.



En effet considérons la cycloïde engendrée par le point M du cercle ω et soit O la position du point M à l'origine du mouvement prenons pour axe la droite Ox base de la cycloïde et la perpendiculaire Oy, soit u l'angle du rayon ωM avec le rayon de contact et a le rayon du cercle générateur. Comme $OP = \overset{\frown}{MP}$ on a pour les coordonnées du point M

$$(1) \quad x = a(u - \sin u)$$
$$(2) \quad y = a(1 - \cos u)$$

différentions ces équations dans lesquelles nous pouvons considérer u comme un paramètre analogue au temps et sur lequel nous aurions pu raisonner précédemment comme nous l'avons fait.

$$\frac{dx}{du} = a(1-\cos u) = y$$

$$\frac{dy}{du} = a \sin u = (au - x)$$

on voit que le centre instantané de rotation a pour coordonnées

$$y = 0$$
$$x = au$$

C'est donc bien le point de contact P.

Rayon de courbure de la cycloïde. — Soit R ce rayon de courbure. On a

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Des formules (1) et (2) on déduit en différentiant

$$dx = a(1 - \cos u)\,du$$
$$dy = a \sin u \, du$$
$$d^2x = a \sin u \, du^2$$
$$d^2y = a \cos u \, du^2$$

Donc

$$R = \frac{[a^2 du^2 (1-\cos u)^2 + a^2 \sin^2 u \, du^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2 \cos u \, du^3 (1 - \cos u) - a^2 \sin^2 u \, du^3} = a \quad \frac{(2 - 2\cos u)^{\frac{3}{2}}}{\cos u - 1}$$

introduisant l'arc $\frac{u}{2}$, il vient

$$R = \frac{8a^3 \sin^3 \frac{u}{2}}{-2a^2 \sin^2 \frac{u}{2}} = -4a \sin \frac{u}{2}$$

Nous obtenons une expression négative, cela montre (d'après une remarque faite précédemment) que la courbe tourne sa concavité vers les y négatifs.

Si l'on observe que

$$MP = 2a \sin \frac{u}{2}$$

et que la droite MP est normale à la cycloïde, on voit que le centre de courbure est un point C de PM tel que $CM = 2PM$.

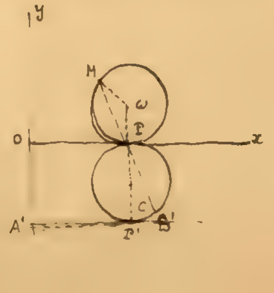
Développée de la cycloïde. — Proposons-nous de chercher la développée de la cycloïde, c'est-à-dire le lieu des centres de courbure.

Je décris une circonférence tangente à la droite Ox au point P et de même rayon que la circonférence proposée. Elle passe certainement au point C. Je mène la 2e tangente parallèle à Ox; soit P' son point de contact, et A' le point où elle rencontre Oy.

Je porte sur cette tangente un segment $A'B'$ égal à la demi-longueur de la circonférence. On a évidemment $A'P' = OP$.

Mais $OP = PM = PC$. Il en résulte donc que $A'P' = PC$ et par suite que $P'C = P'B'$.

Donc le lieu du centre de courbure est la cycloïde décrite par le point C du cercle PCP' roulant sur la droite $A'B'$; c'est une cycloïde égale à la précédente, mais transportée parallèlement à elle-même à une distance égale à $a\pi$ dans le sens Ox et à une distance $-2a$ dans le sens Oy.



On obtient immédiatement ce résultat par le calcul.
Les coordonnées du point M sont

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

celles du point P sont

$$x = au$$
$$y = 0$$

il en résulte immédiatement que les coordonnées du point C sont
$$x = a(u + \sin u)$$
$$y = -a(1 - \cos u)$$

Je transporte les axes de coordonnées au point de coordonnées:

$$x = \pi a$$
$$y = -2a$$

Les coordonnées nouvelles sont

$$x' = x - \pi a = a(u + \sin u) - \pi a$$
$$y' = y + 2a = -a(1 - \cos u) + 2a$$

Je pose $u' = u - \pi$
Les coordonnées x' et y' deviennent

$$x' = a(u' - \sin u')$$
$$y' = a(1 - \cos u')$$

Le lieu est une cycloïde située par rapport aux nouveaux axes comme la cycloïde donnée l'est par rapport aux axes primitifs.

21ème Leçon

Déplacement d'un corps solide invariable dans l'espace. –

Dans le cas du glissement d'une figure plane invariable sur son plan nous avons cherché la loi générale des vitesses des différents points au même moment. Nous allons traiter le même problème pour le déplacement d'un solide invariable dans l'espace.

Ceci revient à chercher l'expression la plus générale du déplacement infiniment petit du corps à partir d'un moment déterminé.

Nous ne devrons donc avoir dans la solution que 6 constantes arbitraires, la position d'un corps de forme déterminée dans l'espace ne dépendant que de 6 paramètres. — Rapportons le mouvement à trois axes fixes rectangulaires

Soient u_0 v_0 w_0 les trois composantes suivant ces axes, de la vitesse d'un point quelconque du corps à l'instant t_0 x, y, z les coordonnées d'un point du corps à ce même moment, x_1 y_1 z_1, celles d'un autre point. l étant la distance invariable de ces deux points :

$$(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 = l^2$$

Après un temps infiniment petit cette distance est la même : donc

$$(x_1-x)\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + (y_1-y)\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + (z_1-z)\left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

En supposant le point x_1 y_1 z_1 infiniment voisin du point x, y, z. Cette relation s'écrit :

$$dx\, du_0 + dy\, dv_0 + dz\, dw_0 = 0$$

du_0, dv_0, dw_0 étant les accroissements infiniment petits des composantes de la vitesse au moment déterminé quand on passe du point x, y, z au point infiniment voisin. Comme ces composantes sont alors des fonctions déterminées de x, y, z ; je puis développer et écrire.

$$dx\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}dx + \frac{\partial u_0}{\partial y}dy + \frac{\partial u_0}{\partial z}dz\right) + dy(\text{------}) + dz(\text{------}) = 0$$

Relation qui se vérifie dans toutes les directions autour de (x, y, z) : donc on a :

$$(I) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \qquad (IV) \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

$$(II) \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \qquad (V) \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

$$(III) \quad \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \qquad (VI) \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0$$

Des 3 premières équations on conclut que u_0, v_0, w_0 sont respectivement indépendants de x, y, z.

IV et VI montrent en outre que u_0 est linéaire par rapport à y et aussi à z. Donc en désignant par c_1, r, q, et a des constantes. On a $u_0 = c_1 yz + ry - qz + a$

On a alors en tenant compte de IV :

$$v_0 = -c_1 z x - r x + p z + b$$

Si l'on passe maintenant à w_0, on voit de même qu'il doit être linéaire en x et y, donc de la forme

$$w_0 = l x y + m x + n y + c$$

Mais les relations V et VI exigeraient alors que l fut égal à c_1 et à $-c_1$ ce qui n'est possible que si c_1 est nul; de plus elles [illegible] $m = q$ $n = p$ et finalement on a pour u_0 v_0 w_0 les expressions suivantes :

$$u_0 = r y - q z + a$$
$$v_0 = -r x + p z + b$$
$$w_0 = q x - p y + c$$

qui contiennent bien 6 constantes p, q, r, a, b, c qui ne dépendent que de l'instant considéré.

Voyons si comme dans le mouvement d'une figure plane dans son plan il y a un point qui reste immobile pendant un temps infiniment petit, dont la vitesse au moment considéré soit nulle.

Si on annule u_0, v_0, w_0 on a 3 équations à 3 inconnues x, y, z dont le déterminant est nul, qui sont donc incompatibles pour les valeurs générales des constantes a, b, c.

Si ces équations ont une solution, elles en ont une infinité.

Si un point du corps a une vitesse nulle, une infinité sont dans ce cas.

Prenons le premier pour origine alors, $a = b = c = 0$ et on a

$$u_0 = r y - q z$$
$$v_0 = -r x + p z$$
$$w_0 = q x - p y$$

et tous les points de la droite

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

restent immobiles pendant un temps infiniment petit. Le mouvement infiniment petit du corps à partir du moment choisi est une rotation autour de cette droite.

Dans le cas général, où les équations $u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0$ sont incompatibles. On peut déterminer λ de façon que les équations

$$\text{VII} \quad \begin{cases} u_0 = \lambda p \\ v_0 = \lambda q \\ w_0 = \lambda r \end{cases}$$

soient compatibles, il suffit de prendre $h = \dfrac{ap+bq+cr}{p^2+q^2+r^2}$ les équations VII se réduisent à deux pour cette valeur de h et déterminent les points d'une droite de paramètres directeurs (p, q, r)

On voit alors que dans le cas général du mouvement infiniment petit d'un corps solide tous les points d'une droite du solide sont animés d'une vitesse dirigée suivant cette droite, le reste du solide tournant en même temps autour de la droite.

On peut donc énoncer le théorème suivant dû à Euler :

Le mouvement le plus général d'un solide invariable dans l'espace peut être considéré comme une suite de mouvements hélicoïdaux infiniment petits.

Développée d'ellipse.— Proposons-nous de chercher l'équation de la développée de l'ellipse représentée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Formons d'abord les dérivées $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Dérivant l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

D'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Dérivant encore l'équation (2), il vient

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

J'en tire

$$\frac{1}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^4y^2} + \frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

D'où l'on déduit (en remarquant que $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

L'équation de la développée s'obtiendra comme on sait en éliminant x et y entre l'équation de la courbe et les équations

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

La 2ème s'écrit ici

$$1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}-(y-\beta)\frac{b^4}{a^2y^3}=0$$

On en déduit

$$y-\beta=\frac{a^2y^3(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^4y^3}$$

Remplaçant b^2x^2 par sa valeur $a^2(b^2-y^2)$ il reste

$$y-\beta=\frac{y\left[a^2y^2+b^2(b^2-y^2)\right]}{b^4}=y-\frac{y^3(a^2-b^2)}{b^4}$$

D'où

$$\beta=-\frac{c^2y^3}{b^4}$$

Il est évident que l'expression de α s'obtiendra en changeant respectivement y et b en x et a dans celle de β.

Il vient ainsi

$$\alpha=+\frac{c^2x^3}{a^4}$$

Pour obtenir l'équation du lieu cherché il suffit d'éliminer x et y entre ces deux équations et celle de la courbe.—

De chacune des dernières, je tire

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{(b\beta)^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$$

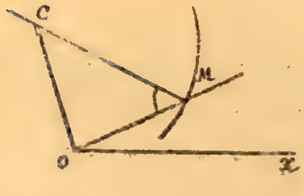
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$$

Portant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse, il vient l'équation cherchée

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Développée de la Spirale Logarithmique.— On sait que la spirale logarithmique a pour équation en coordonnées polaires :

$$\rho=a^{m\omega}$$



Or en faisant le changement de variable défini par les équations

$$x=\rho\cos\omega$$
$$y=\rho\sin\omega$$

On trouve pour expression générale du rayon de courbure en coordonnées polaires.

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}$$

Cette formule donne pour le rayon de courbure de la spirale l'expression

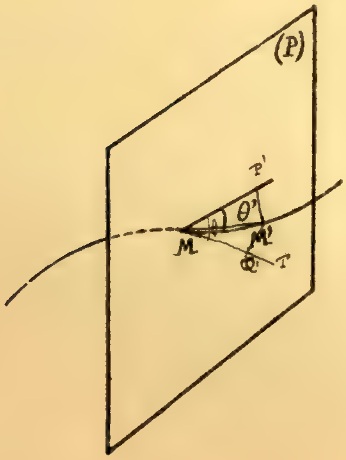
$$R = \rho\ \sqrt{1+m^2}$$

Or la tangente à la courbe et par conséquent la normale font en chaque point le même angle avec le rayon vecteur. Donc si MC est la normale en M l'angle $\overline{OMC}$ est constant, comme le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur. On voit que la développée de la spirale logarithmique est une spirale semblable et par conséquent égale à la proposée.

Car une spirale semblable à une spirale donnée n'est autre que la première qui a tourné d'un certain angle autour de l'origine, en vertu du théorème suivant :

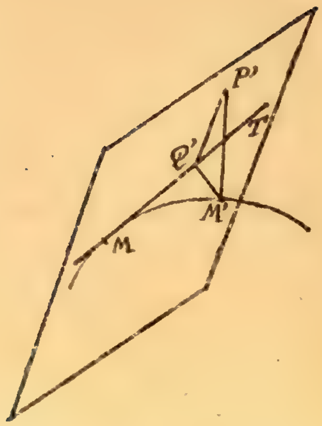
Deux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique qui font un angle constant, sont entre eux dans un rapport constant.

Courbes gauches. — Plan osculateur à une courbe gauche. —



Considérons une courbe gauche, et un plan P la coupant sous un angle fini en l'un de ses points M. — Soit M' un point voisin du point M. La distance du point M' au plan (P) est évidemment égale à $MM' \sin\theta'$, si θ' est l'angle de la corde MM' avec le plan (P). — Lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M cette [distance] diffère infiniment peu de $[ds \sin\theta]$ ds étant la différentielle de l'arc et θ l'angle de la courbe avec le plan (P). — Si donc on prend ds comme infiniment petit principal, la distance d'un point infiniment voisin de M au plan P est un infiniment petit du 1er ordre.

Supposons maintenant que le plan passe par la tangente MT, soit $M'P'$ la distance du point M' au plan et $M'Q'$ sa distance à la tangente MT, pour une orientation quelconque du plan P les angles du triangle $P'M'Q'$ ont des valeurs finies et par suite $M'P'$ et $M'Q'$ sont deux infiniment petits de même ordre lorsque



l'arc MM' est infiniment petit. Mais on sait que M'Q' est du deuxième ordre par rapport à l'arc MM', donc M'P' est aussi du 2ème ordre. Si l'angle M'Q'P' est infiniment petit, il n'en sera plus de même et la distance M'P' sera au moins un infiniment petit du 3e ordre. — Le plan P répondant à cette condition est dit plan osculateur à la courbe au point M.

Cherchons l'équation de ce plan.

Pour cela je considère une courbe gauche, dont les coordonnées des divers points sont fonction d'une même variable indépendante α.

Soit d'ailleurs x, y, z les coordonnées du point considéré M. Un plan quelconque passant par ce point a une équation de la forme

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

Nous allons déterminer les coëfficients A, B, C de manière que le plan soit osculateur.

Pour cela je considère un point de la courbe voisin de M dont les coordonnées sont

$$x+\Delta x \qquad y+\Delta y \qquad z+\Delta z$$

La distance au plan P est comme on sait

$$D=\frac{A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Lorsque $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tendent vers 0 cette distance est évidemment infiniment petite; pour reconnaître son ordre d'infinitude je développe $\Delta x, \Delta y, \Delta x$ par la formule de Taylor (x, y, z sont des fonctions de α).

On a

$$\Delta x = dx+\frac{1}{2}d^2x+\frac{1}{6}d^3x \dots\dots$$

$$\Delta y = dy+\frac{1}{2}d^2y+\frac{1}{6}d^3y \dots\dots$$

$$\Delta z = dz+\frac{1}{2}d^2z+\frac{1}{6}d^3z$$

Donc

$$D=\frac{Adx+Bdy+Cdz+\frac{1}{2}(Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z)+\frac{1}{6}(Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Dans le cas général, cette distance est un infiniment petit du 1er ordre

Elle devient du 2e ordre si l'on a

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

Cette relation exprime que les deux directions dont les cosinus directeurs sont proportionnels d'une part à dx, dy, dz, d'autre part à A, B, C sont rectangulaires ; ces directions étant celles de la tangente à la courbe et de la normale au plan, la relation exprime que le plan passe par la tangente à la courbe.

Pour que la différence devienne un infiniment petit du 3e ordre, il faut que l'on ait à la fois

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$$

de ces équations on tire

$$\frac{A}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{B}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{C}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Elles définissent donc un plan et en général un seul appelé plan osculateur. Il a pour équation

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(t-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(u-y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(v-z) = 0$$

Théorème. — La surface développable, enveloppe des plans osculateurs à une courbe est le lieu des tangentes à cette courbe. Il résulte de là que le plan osculateur est le plan tangent au lieu des tangentes à la courbe, c'est-à-dire qu'il passe par deux tangentes infiniment voisines.

Pour démontrer ce théorème, je vais traiter la question dans le sens inverse, et montrer que les plans tangents à une surface développable sont osculateurs à l'arête de rebroussement ; il en résultera immédiatement que si l'on considère la surface développable qui admet comme arête de rebroussement la courbe donnée, le plan tangent à cette surface le long d'une génératrice coïncide avec le plan osculateur à la courbe, au point où cette courbe rencontre la génératrice.

Je considère donc une surface développable enveloppe du plan :

$$Ax + By + Cz = H$$

les coëfficients A, B, C, H dépendant d'un paramètre variable α.

Les équations d'une génératrice (caractéristique du plan mobile) sont, comme on sait

$$(1)\quad Ax + By + Cz = H$$
$$(2)\quad x\,dA + y\,dB + z\,dC = dH$$

et l'arête de rebroussement est le lieu d'un point de cette génératrice tel que la tangente à ce lieu soit précisément cette génératrice. — Or, la direction de la génératrice est déterminée par les deux équations que l'on obtient en différentiant les équations (1) et (2) dans lesquelles on considère A, B, C, H comme données :

$$(3) \quad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

$$(4) \quad dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = 0$$

La direction de la tangente à l'arête de rebroussement si elle existe doit satisfaire à ces deux équations et à celles obtenues en différentiant les équations (1) et (2) en y regardant les coëfficients comme variables ; — il vient ainsi les deux équations :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + x\,dA + y\,dB + z\,dC = dH$$

$$dA\,dx + dB\,dy + dC.dz + x\,d^2A + y\,d^2B + z\,d^2C = d^2H$$

La première d'entre elles se simplifie en tenant compte de l'équation (1) et elle se réduit alors à l'équation (3). — Donc, les quantités $x\,y\,z$ sont assujetties seulement à satisfaire à la fois aux équations (3) et (4) et à l'équation

$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz + x\,d^2A + y\,d^2B + z\,d^2C = d^2H$$

qui, à cause de l'équation (4) se réduit à

$$(5) \quad x\,d^2A + y\,d^2B + z\,d^2C = d^2H$$

Cette équation entre $x\,y\,z$ et le paramètre variable définit sur chaque génératrice le point appartenant à l'arête de rebroussement. — L'équation de cette courbe s'obtiendrait donc en éliminant le paramètre variable α entre les 3 équations :

$$(1) \quad Ax + By + Cz = H$$

$$(2) \quad x\,dA + y\,dB + z\,dC = dH$$

$$(3) \quad x\,d^2A + y\,d^2B + z\,d^2C = d^2H$$

Pour faire voir que le plan qui enveloppe la surface développable est le plan osculateur, je devrais de ces équations tirer les expressions de

$$dx,\ dy,\ dz,\ d^2x,\ d^2y,\ d^2z$$

former à l'aide de ces quantités l'équation du plan osculateur et vérifier que c'est bien l'equation du plan mobile.

Le calcul se simplifie beaucoup de la manière suivante : —

Différentions l'équation (1) il vient :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + x\,dA + y\,dB + z\,dC = dH$$

Cette équation se réduit à :

$$(6)\quad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

à cause de l'équation (2)

Différentiant cette nouvelle équation, il vient :

$$(7)\quad A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z + dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = 0$$

Mais en différentiant (2) et en simplifiant à l'aide de l'équation (3) l'équation qui résulte de cette nouvelles différentiation, il vient :

$$dx.\,dA + dy\,dB + dz\,dC = 0$$

équation qui permet de simplifier (7), qui se réduit alors à

$$(8)\quad A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$$

Ceci posé, en comparant les 2 équations (6) et (8) on est conduit aux égalités :

$$\frac{A}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{B}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{C}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

L'équation du plan osculateur à l'arête de rebroussement au point de coordonnées x, y, z peut donc s'écrire

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0$$

Mais, comme le point $x\,y\,z$ est sur la surface, l'équation (1) est satisfaite, et par suite le plan osculateur a pour équation :

$$At + Bu + Cv = H$$

C'est là précisément l'équation du plan tangent à la surface développable. — Le théorème se trouve donc démontré.

On voit donc que le plan osculateur à une courbe est le plan tangent à la surface développable, lieu des tangentes à la courbe, ou encore le plan passant par deux tangentes infiniment voisines de la courbe.

Il résulte de là un moyen souvent commode de déterminer le plan osculateur à une courbe gauche. Par un point S de l'espace, on mène des parallèles aux tangentes de la courbe donnée ; on obtient ainsi un cône dont les génératrices sont parallèles à celles de la surface développable : c'est le cône directeur. — Le plan tangent à ce cône le long d'une génératrice est évidemment parallèle au plan osculateur passant par la tangente à laquelle la génératrice est parallèle.

Si l'on considère l'intersection du cône directeur avec une sphère ayant son centre au sommet de ce cône, on obtient une

courbe dite indicatrice sphérique de la surface développable. Les plans tangents au cône étant les plans des grands cercles tangents à cette indicatrice sphérique, on peut énoncer ce théorème :

Les plans osculateurs à une courbe gauche sont parallèles aux plans des grands cercles tangents à l'indicatrice sphérique de la surface développable, lieu des tangentes à la courbe gauche donnée.

Application à l'hélice. — Si l'on considère une hélice tracée sur un cylindre quelconque, c'est-à-dire une courbe coupant toutes génératrices du cylindre sous le même angle, son cône directeur est, évidemment un cône de révolution autour d'une parallèle aux génératrices du cylindre, et, son indicatrice sphérique, un petit cercle. Un plan osculateur à l'hélice passe par une tangente T à cette courbe et est parallèle au plan tangent au cône de révolution le long de la génératrice de ce cône parallèle à T.

Or, ce plan tangent est perpendiculaire au méridien défini par cette parallèle à T, et par l'axe, qui est parallèle aux génératrices du cylindre. Donc le plan osculateur à l'hélice est perpendiculaire au plan mené par la tangente T à l'hélice parallèlement aux génératrices du cylindre, c'est-à-dire au plan tangent au cylindre.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — **Les plans osculateurs à une hélice sont normaux au cylindre sur lequel cette hélice est tracée.**

Ce résultat peut se démontrer aisément par le calcul.

A cet effet, je prends trois axes rectangulaires dont l'un Oz soit parallèle aux génératrices du cylindre. — Le plan des xy coupe ce cylindre suivant une courbe dont j'exprime les coordonnées en fonction de l'arc S choisi comme variable indépendante.

$$\begin{cases} x = \varphi(S) \\ y = \psi(S) \end{cases}$$

On sait que la cote d'un point de l'hélice est proportionnelle à la distance curviligne du point où elle coupe le plan de base (on le constate immédiatement en remarquant que, d'après la définition adoptée, l'hélice se développe suivant une droite). Donc les coordonnées d'un point de l'hélice sont définies par les équations

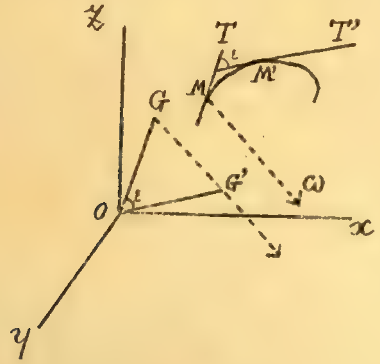
$$(1) \begin{cases} x = \varphi(S) \\ y = \psi(S) \\ z = ms \end{cases}$$

On calculera $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, $\frac{d^2x}{ds}$ ..... etc et le calcul des coëfficients du plan osculateur vérifiera le théorème.—

22ème Leçon

Courbure d'une courbe gauche.— On appelle courbure d'un arc de courbe gauche l'angle des tangentes à la courbe aux extrémités de l'arc; courbure moyenne d'un arc le quotient de la courbure par la longueur de l'arc; courbure en un point la courbure d'un arc infiniment petit à partir de ce point; et le rayon de courbure l'inverse de la courbure.— Le rayon de courbure de la courbe C au point M est alors le quotient de l'arc infiniment petit MM' par l'angle ε des tangentes MT, $M'T'$.

$$R = \frac{\overline{MM'}}{\varepsilon}$$



Par l'origine je mène deux droites OG, OG' parallèles aux tangentes MT, $M'T'$ et ayant pour longueur l'unité. On a

$$GG' = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

Il diffère donc de ε d'un infiniment petit du 3e ordre que je néglige. Soit x, y, z les coordonnées du point M, celles de G sont

$$\frac{dx}{ds} \quad \frac{dy}{ds} \quad \frac{dz}{ds}$$

(en effet elles sont proportionnelles à dx, dy, dz, et la somme de leurs carrés est bien l'unité). Celles de G' sont de même

$$\frac{dx}{ds} + d\left(\frac{dx}{ds}\right) \quad \frac{dy}{ds} + d\left(\frac{dy}{ds}\right) \quad \frac{dz}{ds} + d\left(\frac{dz}{ds}\right)$$

Alors

$$\overline{GG'}^2 = \left[d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]^2$$

et par suite

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\overline{GG'}^2}{\overline{MM'}^2} = \frac{\left[d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]^2}{ds^2}$$

Si l'on prend s comme variable indépendante, cette expression se réduit à

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

Cette expression est simple mais d'un usage pratique seulement dans le cas très rare où les coordonnées d'un point de la courbe sont exprimées en fonction de l'arc.

Si on ne fixe pas de variable indépendante :

$$d.\frac{dx}{ds} = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2}$$

et alors on a

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)^2 + (\cdots\cdots)^2 + (\cdots\cdots)^2}{ds^6}$$

$$= \frac{ds^2\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right) + ds^2(d^2s)^2 - 2\,ds^2(d^2s)^2}{ds^6}$$

$$= \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}{ds^4}$$

Cette formule déjà plus commode dans les applications renferme encore ds et d^2s ; si on veut une expression où n'entre que les différentielles de x, y, z. on remplace ds et d^2s par leur valeur dans l'avant dernière expression

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\left((d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\right) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}$$

Ces égalités définissent la grandeur du rayon de courbure.

Pour définir sa position on convient de le porter dans le sens de la concavité de la courbe sur la normale MN située dans le plan osculateur (normale principale). Son extrémité ω est appelée centre de courbure et l'on appelle cercle de courbure le cercle décrit dans le

plan osculateur, du centre de courbure comme centre et avec le rayon de courbure comme rayon. — Il est aisé de voir que, sur la figure, cette direction est celle de G vers G'.

La géométrie le fait voir immédiatement ; en effet G'G est situé dans le plan parallèle aux deux tangentes infiniment voisines MT, MT', c'est-à-dire parallèle au plan osculateur en M ; le triangle OGG' étant isocèle et l'angle en O infiniment petit, GG' est perpendiculaire à OG, c'est-à-dire parallèle à la normale en M à la courbe ; de plus il est aisé de reconnaître sur la figure que la direction de G vers G' est toujours la même que la direction de M vers ω.

Les cosinus directeurs de la direction GG' sont proportionnels aux différences des coordonnées des points G' et G, ou encore à ces différences divisées par ds^2, c'est-à-dire à

$$\frac{d^2x}{ds^2} \quad \frac{d^2y}{ds^2} \quad \frac{d^2z}{ds^2}$$

Mais la somme des carrés de ces expressions étant, d'après ce qui précède $\frac{1}{R^2}$, ces cosinus directeurs sont

$$\cos\lambda = R\,\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\cos\mu = R\,\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$\cos\nu = R\,\frac{d^2z}{ds^2}$$

Le centre de courbure a alors pour coordonnées

$$t = x + R\cos\lambda = x + R^2\,\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$u = y + R\cos\mu = y + R^2\,\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$v = z + R\cos\nu = z + R^2\,\frac{d^2z}{ds^2}$$

Il est aisé de reconnaître que le cercle de courbure d'une courbe gauche en un point est confondu avec son cercle osculateur en ce point, c'est-à-dire qu'il a avec la courbe un contact du 3e ordre.

Pour cela il faut voir si les différentielles $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$ sont les mêmes pour le cercle et pour la courbe.

Si x_1, y_1, z_1. sont les coordonnées du point considéré sur la courbe le cercle de courbure a pour équations :

$$A\ (x-x_1)+B\ (y-y_1)+C\ (z-z_1)=0$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

les différentielles des coordonnées du point de la courbe vérifient bien les équations

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0$$
$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0$$
$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+(z-\gamma)\,dz=0$$
$$(x-\alpha)\,d^2x+(y-\beta)\,d^2z+(z-\gamma)\,d^2z+ds^2=0$$

qui déterminent $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$ pour le cercle.

En effet, A, B, C sont les coëfficients du plan osculateur, qui sont déterminés par les conditions :

$$A\,dx_1+B\,dy_1+C\,dz_1=0$$
$$A\,d^2x_1+B\,d^2y_1+C\,d^2z_1=0$$

et quand on remplace α, β, γ par leurs valeurs :

$$\alpha=x_1+\rho^2\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)_1$$

les deux dernières équations sont satisfaites.

Si nous reprenons les deux équations en α, β, γ

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+(z-\gamma)\,dz=0$$
$$(x-\alpha)\,d^2x+(y-\beta)\,d^2y+(z-\gamma)\,d^2z+ds^2=0$$

où $x, y, z, dx, dy, dz, \ldots$ etc se rapportent à un point de la courbe nous voyons que ce sont des équations équivalentes à celles de deux plans normaux infiniment voisins. Elles définissent une droite perpendiculaire au plan osculateur et passant au centre du cercle osculateur par conséquent l'axe de ce cercle, et nous avons ce théorème :

L'axe du cercle osculateur est l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins.

Le lieu de ces axes est donc la surface développable enveloppe des plans normaux. L'équation de cette surface s'obtiendra en éliminant le paramètre α dont dépendent x, y, z sur la courbe entre les deux équations

$$(t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=0$$
$$(t-x)\,d^2x+(u-y)\,d^2y+(v-z)\,d^2z-ds^2=0$$

Ces deux équations définissent donc la surface.

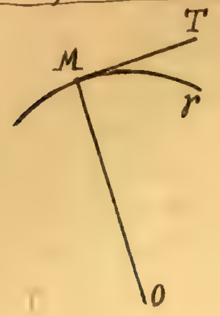
On aura l'arête de rebroussement de cette surface en adjoignant à ces deux équations, celle obtenue en différentiant la dernière.

$$(t-x)\,d^3x + (u-y)\,d^3y + (v-z)\,d^3z - 3\,ds\,d^2s = 0$$

le point défini par ces 3 équations pour un certain point de la courbe donnée est le centre de la sphère osculatrice à la courbe en ce point (c'est-à-dire qui y a avec la courbe un contact du 3ème ordre.

On verrait facilement en effet que la recherche directe de cette sphère amènerait à l'écriture de ces 3 équations.

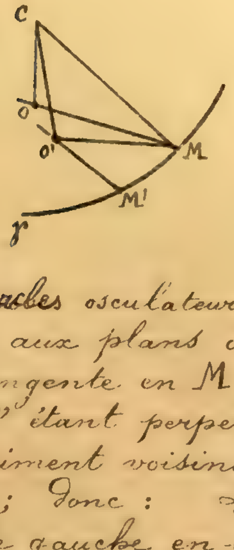
Théorème.— <u>Le lieu des normales principales d'une courbe gauche n'est pas une surface développable</u>.



Soit la courbe $M\gamma$, M un point de cette courbe, MT et MO la tangente et la normale principale en ce point. Si MO engendrait une surface développable, cette surface contiendrait la courbe $M\gamma$, le plan tangent à cette surface le long de MO serait donc le plan osculateur TMO. C'est impossible car cette surface serait l'enveloppe des plans osculateurs de la courbe et par conséquent le lieu de ses tangentes.

Il s'ensuit que pour une courbe gauche les normales principales n'étant pas tangentes à une même courbe, le lieu des centres de courbure n'est pas une développée.

Pour voir quelle est la tangente au lieu des centres de courbure: Considérons la courbe $M\gamma$, un point M sur cette courbe, la normale MO et l'axe du cercle osculateur en M;



OC : O est le centre de courbure et C le centre de la sphère osculatrice au point M. Prenons le point M' sur la courbe, infiniment voisin de M, la normale $M'O'$, l'axe du cercle osculateur en M', passera aussi par le point C puisque c'est le point d'intersection de deux axes de cercles osculateurs infiniment voisins. Le plan COO' est perpendiculaire aux plans osculateurs en M et M' donc à leur intersection qui est la tangente en M. Donc les 4 points $COO'M$ sont dans le plan normal et CO' étant perpendiculaire à $O'M$. On voit que O et O' sont deux points infiniment voisins du cercle décrit sur CM comme diamètre dans ce plan; donc : <u>La tangente au lieu des centres de courbure d'une courbe gauche en un de ces centres de courbure est la même que celle du cercle situé dans le plan normal correspondant et qui a pour</u>

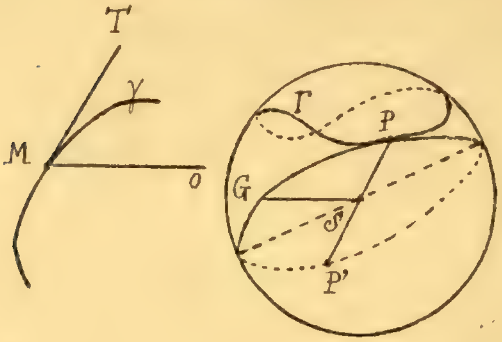
diamètre la droite joignant le centre de la sphère osculatrice au point de la courbe donnée.

Théorème. — Si par le centre d'une sphère on mène des parallèles aux normales principales d'une courbe gauche fermée, on a sur la sphère une courbe fermée qui partage la sphère en deux parties équivalentes.

Soit $M\gamma$ la courbe donnée, MO et MT la normale principale et la tangente en M.

Par le centre S de la sphère donnée menons SG parallèle à MO.

Si nous considérons l'indicatrice sphérique Γ de la courbe sur la sphère, la parallèle SP à MT perce la sphère en un point de cette indicatrice. On sait que le plan PSG parallèle au plan osculateur de la courbe est le plan du grand cercle tangent en P à l'indicatrice Γ et sur ce grand cercle G est à une distance de P égale à un quadrant donc égale à la distance de G au point P' symétrique de P par rapport au centre.



Or quand P se déplace sur l'indicatrice, c'est-à-dire quand M se déplace sur la courbe, P' décrit une courbe symétrique de l'indicatrice sur la sphère on en conclut facilement le théorème énoncé. —

Théorème. — Quand dans une courbe à double courbure le rayon de courbure est constant, le lieu des centres de courbure est l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans normaux.

Soit en effet la courbe $M\gamma$, la normale MO et l'axe du cercle osculateur $O\omega$ correspondant au point M

Puisque MO est constant, comme ce segment de droite est normal au déplacement du point M, il est aussi normal au déplacement du point O. La tangente au lieu du point O est donc perpendiculaire à MO, d'ailleurs la courbe lieu de O étant tracée sur la surface enveloppe des plans normaux ou lieu des axes osculateurs, la tangente à cette courbe en O est dans le plan tangent à la surface, donc dans le plan normal $MO\omega$.

C'est par conséquent la droite $O\omega$ elle même ce qui démontre le théorème.

23ème Leçon

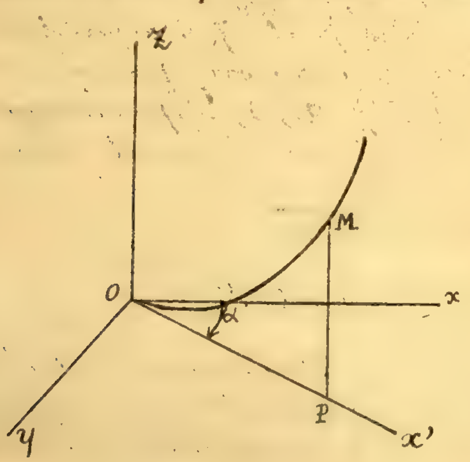
Courbure des Surfaces

Courbure d'une section normale

Pour étudier la courbure d'une surface autour d'un point, nous étudierons d'abord les sections normales. A cet effet je rapporte la surface à trois axes rectangulaires passant par le point considéré, dont l'axe OZ soit la normale.

Soit $Z = \varphi(x, y)$ l'équation de la surface dans ces conditions.

Il résulte du choix des axes que lorsque l'on annule simultanément x et y la valeur de Z et de ses dérivées partielles p et q par rapport à x et y deviennent nulles.



Ceci posé je considère une section normale de la surface, son plan passe par OZ, et a pour trace sur le plan des xy une certaine droite Ox' ; soit α l'angle que fait avec le plan xOZ le plan considéré. Je vais chercher l'équation de la section plane faite par ce plan par rapport aux deux axes rectangulaires Ox' et OZ : pour cela soit M un point de la courbe de coordonnées x, y, Z.

Ses coordonnés par rapport aux deux axes Ox', OZ sont

$$MP = Z$$

et OP que je désigne par x'

On a d'ailleurs

$$x = x' \cos\alpha \qquad y = x' \sin\alpha$$

Mais entre x, y, Z on a la relation

$$Z = \varphi(x, y)$$

elle entraîne entre Z et x' la relation

$$Z = \varphi(x' \cos\alpha, x' \sin\alpha)$$

qui est l'équation de la section dans le plan considéré par rapport

aux deux axes que nous avons choisis.

Le rayon de courbure est donné par la formule générale.

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dx'^2}}$$

De l'équation (1) on déduit immédiatement les expressions de $\frac{dz}{dx'}$ et $\frac{d^2z}{dx'^2}$ en fonction des dérivées de z par rapport à x et y au moyen du théorème des fonctions composées.

Je désigne par p, q, r, s, t les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre de z par rapport à x et y, on a

$$\frac{dz}{dx'} = p \operatorname{Cos} \alpha + q \operatorname{Sin} \alpha$$

$$\frac{d^2z}{dx'^2} = r \operatorname{Cos}^2 \alpha + 2 s \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + t \operatorname{Sin}^2 \alpha.$$

Pour obtenir la courbure au point 0, il faut faire dans ces expressions x et y nuls, dans ces conditions p et q s'annulent, (on trouve ainsi $\frac{dz}{dx'} = 0$ ce qui était évident à priori puisque la courbe considérée est tangente en 0 à $0x'$), r, s, t prennent des valeurs numériques déterminées A, B, C et il vient alors

$$R = \frac{1}{A \operatorname{Cos}^2 \alpha + 2B \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + C \operatorname{Sin}^2 \alpha}$$

ou

$$\frac{1}{R} = A \operatorname{Cos}^2 \alpha + 2B \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + C \operatorname{Sin}^2 \alpha$$

Cette équation résout le problème proposé, elle montre la loi de variation des courbures des sections normales passant en un point, cette loi est de même nature pour toutes les surfaces, mais les coëfficients A, B, C varient avec les surfaces.

On peut faire l'objection suivante au résultat auquel nous venons d'arriver.

Cas d'exception. — Il semble que l'on puisse construire une surface en prenant arbitrairement une droite qui soit normale en un point A et en traçant sur chaque plan passant par cette droite des courbes passant par le point A et dont les courbures satisfassent à une loi absolument arbitraire (on peut faire une objection de même genre à cette propriété que les tangentes à toutes les courbes tracées sur une surface et passant par un point sont dans un même plan).

La réponse à cette objection est que le théorème énoncé s'applique

dans le cas général, mais il souffre une exception lorsque l'une ou l'autre des quantités r, s, t prend pour le point considéré une valeur indéterminée, dans ce cas le calcul précédent ne donne pas une valeur déterminée pour le rayon de courbure. Ceci ne se présente jamais que pour un nombre limité de points de la surface. Ils sont dits points singuliers.

Telle est par exemple l'origine pour une surface ayant une équation de la forme

$$z = F\left(\frac{y}{x}, x\right)$$

Rayons de courbure principaux. — Ceci posé nous nous proposons d'étudier les variations de la courbure d'une section normale. quand α varie

De la formule

$$\frac{1}{R} = A \cos^2\alpha + 2B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin^2\alpha$$

on déduit en différentiant

$$d\left(\frac{1}{R}\right) = -2A \sin\alpha \cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C \sin\alpha \cos\alpha$$

$$d\left(\frac{1}{R}\right) = 2B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha$$

En annulant cette expression on obtient les valeurs de α pour lesquelles la courbure est maxima ou minima.

Il vient ainsi

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \qquad (1)$$

On déduit de là pour α des valeurs qui diffèrent les unes des autres de $\frac{\pi}{2}$; elles définissent donc deux directions et deux seulement qui sont rectangulaires. Pour reconnaître si elles correspondent à un maximum ou à un minimum, je considère le signe de la différentielle seconde

$$d^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4B \sin 2\alpha - 2(A-C) \cos 2\alpha$$

lorsque dans cette expression on remplace successivement α par deux valeurs différant de $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire 2α par deux valeurs différant de π les deux termes de l'expression se trouvent changés de signe et l'expression aussi.

Il en résulte immédiatement qu'il y a maximum pour l'une des valeurs et minimum pour l'autre.

Théorème d'Euler. — Ces deux plans rectangulaires sont dits plans de section principale, et les rayons de courbure correspondants sont dits rayons de courbure principaux.

Je puis prendre ces deux plans pour plan de coordonnées, dans

ces conditions les constantes. A, B, C prennent de nouvelles valeurs qui sont telles que l'équation (1) qui définit les directions de plans de section principale donne

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire $2\alpha = 0$ ou $2\alpha = \pi$

il faut et il suffit que l'on ait pour cela

$$B = 0$$

et la relation qui relit R et α prend la forme

$$\frac{1}{R} = A \operatorname{Cos}^2 \alpha + B \operatorname{Sin}^2 \alpha$$

Si l'on fait successivement

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

on voit que les constantes A et B représentent les inverses des rayons de courbure principaux, si je les désigne par R_1 et R_2 la relation prend la forme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \operatorname{Cos}^2 \alpha + \frac{1}{R^2} \operatorname{Sin}^2 \alpha$$

De cette relation on déduit immédiatement le théorème suivant connu sous le nom de théorème d'Euler.

Considérons les rayons de courbure R et R' correspondant à deux directions rectangulaires

$$\alpha \text{ et } \alpha + \frac{\pi}{2}$$

On a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \operatorname{Cos}^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \operatorname{Sin}^2 \alpha$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} \operatorname{Sin}^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

D'où en ajoutant

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

On arrive au résultat que <u>la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques est constante et égale à la somme des courbures principales.</u>

Dans l'étude des variations de la courbure d'une section principale on devra distinguer trois cas différents.

1er Cas. Surfaces convexes.

Les 2 deux rayons de courbure sont positifs. Ils constituent l'un un maximum l'autre un minimum véritables.

Et le rayon de courbure d'une section quelconque étant donné par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha$$

est positif et compris entre R_1 et R_2.

La surface est dite convexe au point considéré.

2e Cas. Surfaces à courbures opposées. — Les deux rayons R_1 et R_2 sont de signes contraire. Soit R_2 celui qui est négatif.

Soit R'_2 sa valeur absolue, alors la courbure définie par l'équation

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha - \frac{1}{R'_2} \sin^2 \alpha$$

s'annule pour deux valeurs de α égales et de signes contraires c'est-à-dire que pour ces deux valeurs le rayon de courbure devient infini, R_1 est alors un minimum relatif et R_2 est un maximum relatif, le rayon prend toutes les valeurs sauf celles comprises entre R_1 et R_2. Il y a des sections normales courbées en l'un ou l'autre sens. La surface est dite à courbures opposées.

3e Cas. — L'un des rayons de courbures principaux est infini la relation trouvée se réduit à

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha$$

le rayon de courbure varie entre R_1 et l'infini.

Indicatrice. — Considérons un point M de la surface et la normale MN en ce point.

Je suppose d'abord que la surface ne soit pas coupée par son plan tangent en M. Je considère la section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à MN et infiniment voisin du point M. Je dis que la courbe infiniment petite obtenue ainsi est une ellipse c'est-à-dire que si <u>l'on considère la section faite par un plan à distance finie du point M et qu'on prend une courbe semblable, le rapport de similitude augmentant indéfiniment lorsque le plan se rapproche indéfiniment du point M, la courbe que l'on obtient tend vers une ellipse.</u>

En effet je rapporte comme précédemment la surface à sa normale en M et à deux axes rectangulaires situés dans le plan tangent. Soit

$$z = \varphi(x, y) \text{ son équation}$$

Je considère la section faite par le plan $z = h$ et soient x, y les coordonnées d'un point de cette section, on a en vertu

de la formule de Taylor.

$$h = \varphi(0,0) + x\varphi'_x(0,0) + y\varphi'_y(0,0) + x^2\varphi''_{x^2}(0,0) + 2xy\varphi''_{xy}(0,0) + y^2\varphi''_{y^2}(0,0) + \cdots\cdots$$

Mais $\varphi(0,0)$, $\varphi'_x(0,0)$, $\varphi'_y(0,0)$ sont nuls à cause du choix particulier des axes que nous avons fait.

Je désigne par A, B, C les valeurs de

$$\varphi''_{x^2}(0,0),\ \varphi''_{xy}(0,0),\ \varphi''_{y^2}(0,0)$$

il reste donc

$$h = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \cdots\cdots$$

les termes que nous négligeons sont du troisième degré, ce sont des infiniment petits négligeables à côté de ceux que nous avons gardés et l'équation de l'indicatrice est donc

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = h$$

c'est bien une conique et il est aisé de reconnaître que c'est une ellipse si la surface est convexe c'est-à-dire si le rayon de courbure d'une section section normale ne peut pas s'annuler (car les coëfficients A, B, C sont les mêmes que précédemment).

La forme de cette courbe fait connaître d'une manière simple le rayon de courbure d'une section normale.

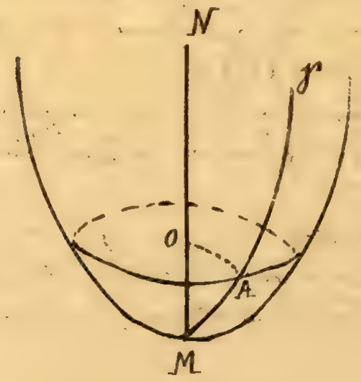
En effet soit O le point où le plan de la courbe coupe la normale MN, il est le centre de l'indicatrice.

Ceci posé considérons le plan normal AMN coupant la surface suivant la courbe Γ et l'indicatrice au point A.

D'après une formule précédemment établie le rayon de courbure de cette courbe est

$$R = \frac{1}{2}\ \frac{\overline{OA}^2}{OM}$$

Si nous faisons tourner le plan autour de la normale, OM reste constant et l'on voit que le rayon de courbure d'une section normale est proportionnel au carré du diamètre déterminé sur l'indicatrice par le plan de cette section.



Il en résulte immédiatement qu'il y a un rayon maximum et un rayon minimum dans deux plans rectangulaires entre

eux, ceux qui passent par les axes de l'indicatrice.

En effet le demi diamètre d'une ellipse faisant avec le grand axe un angle α est donné par la formule

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}$$

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2\alpha + \frac{1}{b^2} \sin^2\alpha$$

Remplaçant b^2, a^2, a'^2 par des quantités proportionnelles R_1 R_2 (rayons de courbure principaux) et R (rayon de courbure de la section considérée) il vient

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \sin^2\alpha + \frac{1}{R_2} \cos^2\alpha .$$

Surfaces à courbures opposées. — En considérant l'équation à laquelle nous sommes arrivés pour l'indicatrice on voit qu'elle représente une hyperbole pour les surfaces à courbures opposées.

D'ailleurs dans ce cas on sait que le plan tangent coupe la surface suivant une certaine courbe présentant des dimensions finies, la courbe suivant laquelle un plan infiniment voisin du plan tangent coupe la surface ne diminue donc pas indéfiniment ; nous obtiendrons l'indicatrice en considérant une partie infiniment petite de cette courbe au voisinage du point de contact. Nous aurons ainsi une hyperbole. Il résulte de là que, comme dans le cas des surfaces convexes, les carrés des diamètres de cette courbe sont proportionnels aux rayons de courbure des sections normales qui passent par ces diamètres. — Comme les sections faites au-dessus et au-dessous du plan tangent sont orientées différemment, il faudrait considérer deux indicatrices, qui seraient deux hyperboles représentées par les équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \pm h$$

ce sont deux hyperboles conjuguées.

On peut n'en considérer qu'une seule en introduisant les diamètres imaginaires de l'hyperbole dont les carrés sont négatifs et représentent avec leurs signes les rayons de courbure des sections situées de l'autre côté.

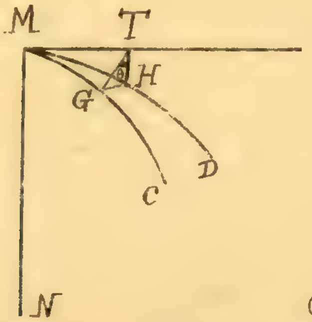
En toute rigueur, il n'est pas évident que les points à l'infini de l'hyperbole indicatrice satisfassent à ces propriétés, car nous n'avons considéré qu'une portion infiniment petite

de l'hyperbole que nous avons amplifiée, mais ils y satisfont bien, car les asymptotes de cette hyperbole forment les tangentes à la courbe d'intersection de la surface et du plan tangent (intersection qui présente comme on sait un point double) et sont comme on sait des tangentes d'inflexion des sections normales qui passent par ces droites, c'est-à-dire que les rayons de courbure de ces sections normales sont infinis.

Courbure d'une section oblique. – Théorème de Meusnier.

Le rayon de courbure d'une section oblique en un point d'une surface est égal au produit du rayon de courbure de la section normale correspondante (section normale passant par la tangente au point considéré à la section oblique) par le cosinus de l'angle des deux plans de section.

Ce théorème peut être aperçu par la géométrie de la manière suivantes :



Soit C la section oblique considérée, M le point où nous cherchons la courbure et MT la tangente, D la section normale correspondante. Sur la tangente je prends un point T infiniment voisin de M par lequel je mène un plan perpendiculaire à MT, qui coupe les deux courbes en G et H.

D'après une formule connue le rayon de courbure ρ de la courbe C est donné par la formule

$$\rho = \frac{\overline{MT}^2}{2TG}$$

et celui de la section normale D est

$$R = \frac{\overline{MT}^2}{2TH}$$

d'où

$$\rho = R\,\frac{TH}{TG}$$

Mais GH joignant deux points infiniment voisins de la surface a pour limite une des tangentes à la surface au point M ; TH est parallèle à la normale MN, donc l'angle THG est droit.

Soit donc θ l'angle en T, on a

$$TH = TG\cos\theta$$

donc

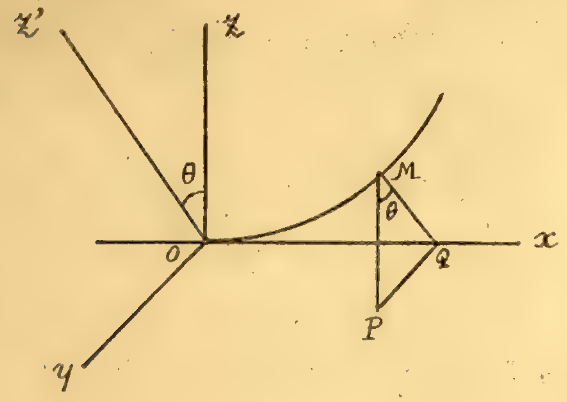
$$\rho = R\cos\theta$$

Mais le plan THG étant perpendiculaire à l'intersection MT des deux plans de section, l'angle θ est celui de ces deux plans, ce qui établit le théorème.

Pour le montrer par le calcul je prends comme axe des z la normale au point considéré, comme axe des x la tangente située dans le plan de section oblique et comme axe des y la tangente perpendiculaire.

Soit $z = \varphi(x, y)$ l'équation de la surface; comme précédemment la fonction φ et ses deux dérivées partielles du 1.er ordre p et q sont nulles lorsqu'on annule à la fois x et y.

Je désigne par θ l'angle du plan de section avec le plan zOx; soit Oz' sa trace sur le plan yOz. Je rapporte la courbe d'intersection aux deux axes rectangulaires Ox et Oz'.



Si M est un point de coordonnées $x\,y\,z$ par rapport aux 3 axes donnés, il aura évidemment pour coordonnées par rapport à ces deux nouveaux axes

$$OQ = x \quad \text{et} \quad MQ = z'$$

On a évidemment

$$MP = MQ \cos\theta$$

$$PQ = MQ \sin\theta$$

c'est-à-dire

$$z = z' \cos\theta$$

$$y = z' \sin\theta$$

L'équation de la section est alors obtenue en remplaçant y et z par ces valeurs dans l'équation de la courbe, c'est

$$z' \cos\theta = \varphi(x', z' \sin\theta)$$

Le rayon de courbure de cette courbe est donné par la formule générale

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z'}{dx'^2}}$$

Pour calculer ces dérivées, je dérive successivement deux fois

l'équation de la courbe ; il vient

$$\cos\theta \frac{dz'}{dx'} = p + q \sin\theta \frac{dz'}{dx'}$$

et $\cos\theta \dfrac{d^2z'}{dx'^2} = r + s\sin\theta \dfrac{dz'}{dx'} + \sin\theta \dfrac{dz'}{dx'}\left(s + t\sin\theta \dfrac{dz'}{dx'}\right) + q \dfrac{d^2z'}{dx'^2}\sin^2\theta.$

$p\ q\ r\ s\ t$ représentent les dérivées partielles du 1.er et du 2.e ordre de la fonction $\varphi(x, y)$ par rapport à x et y ; dans ces relations je fais x et y nuls pour obtenir les valeurs des dérivées qui figurent dans l'expression de ρ. Il vient

$$\frac{dz'}{dx'} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{r}{\cos\theta}$$

Le rayon de courbure de la section considérée est donc

$$\rho = \frac{\cos\theta}{r}$$

Mais le rayon de courbure R de la section normale s'obtient évidemment en faisant $\theta = 0$.

Il vient alors

$$R = \frac{1}{r}$$

et la relation trouvée s'écrit alors

$$\rho = R\cos\theta$$

c'est la relation de Meusnier.

Si on considère une courbe gauche tracée sur une surface pour avoir le rayon de courbure en un point on prend celui de la section de la surface par le plan osculateur à la courbe en ce point.

Si deux surfaces se raccordent le long d'une courbe, et si on les coupe par un plan passant par une tangente à cette courbe, les courbures des deux sections sont les mêmes au point de contact.

C'est vrai pour tout plan passant par la tangente en vertu du théorème de Meusnier puisque, d'après la remarque précédente, c'est vrai pour le plan osculateur à la courbe.

Étude de la courbure d'une surface rapportée à des axes quelconques. Expression du rayon de courbure d'une section normale.

Considérons un point de coordonnées x, y, z d'une surface ayant pour équation

$$z = f(x, y)$$

Le centre de courbure d'une courbe tracée sur la surface est

évidemment à l'intersection de la normale à la surface en ce point avec l'axe de courbure de la courbe (caractéristique du plan normal). — Je désigne par p et q les valeurs des dérivées de z par rapport à x et à y pour le point considéré et par dx, dy, dz les différentielles des coordonnées sur la courbe considérée.

La normale à la surface a pour équations

$$\begin{cases} (1) \quad (t-x) + p\,(v-z) = 0 \\ (2) \quad (u-y) + q\,(v-z) = 0 \end{cases}$$

Celle du plan normal est

$$(3) \quad (t-x)\,dx + (u-y)\,dy + (v-z)\,dz = 0$$

et la caractéristique est définie par cette équation et la suivante

$$(4) \quad (t-x)\,d^2x + (u-y)\,d^2y + (v-z)\,d^2z = d\sigma^2$$

obtenue en différentiant (3) nous avons d'ailleurs supposé dans cette différentiation que les coordonnées $x\,y\,z$ soient exprimées en fonction de l'arc de la courbe.

Ces 4 équations, qui représentent deux droites concourantes, sont compatibles et se réduisent à 3 seulement, car les équations (1) et (2) entraînent l'équation (3), en vertu de la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

Tirant $(t-x)$ et $(u-y)$ des deux premières équations et portant dans l'équation (4), on tire

$$v - z = \frac{d\sigma^2}{d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y}$$

Les équations (1) et (2) donnent alors

$$t - x = \frac{-p\,d\sigma^2}{d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y}$$

$$u - y = \frac{-q\,d\sigma^2}{d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y}$$

Le rayon de courbure est alors donné par la formule

$$\rho = \sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2}$$

c'est-à-dire

$$\rho = \frac{d\sigma^2\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y}$$

On peut dans cette expression faire disparaître les différentielles du second ordre ; en effet de l'identité

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

on déduit en différentiant

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + dx\,dp + dy\,dq$$

c'est-à-dire

$$d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = dp\,dx + dq\,dy$$

Or si l'on désigne par r, s, t les valeurs des dérivées partielles du 2e ordre de z par rapport à x et à y pour le point considéré, on a

$$dp = r\,dx + s\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

On obtient donc pour le rayon de courbure l'expression

$$\rho = \frac{d\sigma^2 \sqrt{1+p^2+q^2}}{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}$$

Cette équation s'écrit encore

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + 2s\frac{dx}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma} + t\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2}$$

Mais si je désigne par α et β les angles de la tangente à la courbe avec les axes des x et des y, leurs cosinus sont $\frac{dx}{d\sigma}$ et $\frac{dy}{d\sigma}$

On peut donc encore écrire

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}$$

Les deux angles α et β ne sont pas indépendants, car la direction de la tangente à la courbe est contenue dans le plan tangent à la surface au point considéré. Si je désigne par $\alpha\ \beta\ \gamma$ les angles de la direction considérée avec les 3 axes, on a

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

puisque ces cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz. On a d'ailleurs

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

remplaçant $\cos\gamma$ par sa valeur, il vient

$$\cos^2\alpha\,(1+p^2) + \cos^2\beta\,(1+q^2) + 2pq\cos\alpha\cos\beta = 1$$

Rayons de courbure principaux. — Cherchons pour quelles valeurs des angles α et β le rayon de courbure dont nous venons

d'obtenir l'expression est maximum ou minimum. — Dans cette expression, le dénominateur est variable. — Pour chercher quand il est maximum ou minimum, j'annule sa différentielle. Il vient ainsi (en remarquant que dans la question r, s, t sont constants).

$$(1)\quad r\cos\alpha\, d(\cos\alpha) + s\cos\beta\, d(\cos\alpha) + s\cos\alpha\, d(\cos\beta) + t\cos\beta\, d(\cos\beta) = 0$$

Mais en différentiant la relation qui lie α et β, il vient

$$(2)\quad (1+p^2)\cos\alpha\, d(\cos\alpha) + pq\left[\cos\alpha\, d(\cos\beta) + \cos\beta\, d(\cos\alpha)\right] + (1+q^2)\cos\beta\, d\cos\beta = 0.$$

De chacune des équations (1) et (2) on peut déduire le rapport $\frac{d(\cos\alpha)}{d(\cos\beta)}$; égalant ces deux valeurs il vient une équation qui jointe à la relation qui existe toujours entre α et β définit les directions pour lesquelles le rayon de courbure est maximum ou minimum, cette équation est

$$(3)\qquad \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}$$

Ces deux rapports égaux entre eux sont respectivement égaux au suivant

$$\frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta}$$

obtenu en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des précédents après avoir multiplié les deux termes respectivement par $\cos\alpha$ et $\cos\beta$.

Mais en vertu de la relation qui lie toujours α et β, cette expression se réduit à son numérateur que je désigne par D; des équations (3) je puis donc déduire les deux suivantes :

$$D = \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta}$$

$$D = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}$$

De chacune de ces équations je puis tirer une valeur du rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Egalant ces deux valeurs, il vient

$$(4)\quad (pqD - s)^2 - \left[(1+p^2)D - r\right]\left[(1+q^2)D - t\right] = 0$$

Cette équation fait connaître deux valeurs de D auxquelles correspondent deux valeurs du rayon de courbure donnée par la formule

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$$

Les racines de cette équation sont toujours réelles : en effet si je remplace D par $\frac{1+p^2}{r}$ ou par $\frac{1+q^2}{t}$ dans le premier membre, il devient positif ; mais le coëfficient du terme en D^2, qui est égal à $-1-p^2-q^2$ est négatif, ce qui fait voir que les deux racines de l'équation sont toujours réelles ; on voit aisément que pour qu'elles soient égales il faut et suffit que l'on ait

$$\frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{r}{1+p^2}$$

Dans ce cas les deux rayons de courbure principaux étant égaux, tous le sont et l'indicatrice est un cercle. D'ailleurs dans ce cas les équations en $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ qui déterminent les directions de sections qui ont un rayon de courbure maximum ou minimum sont identiques, leurs coëfficients étant proportionnels.

Ce point singulier est un ombilic de la surface. Les ombilics d'une surface sont en nombre limité en général puisque pour les déterminer il faut adjoindre les deux équations

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}.$$

à l'équation de la surface.

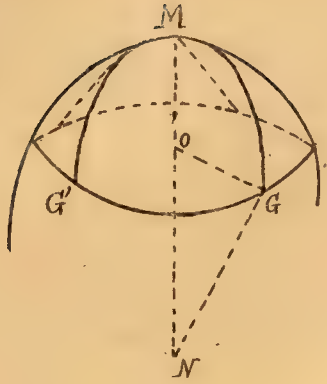
24ème Leçon

Lignes de courbure

On appelle ligne de courbure d'une surface une ligne telle que les normales élevées à la surface en les différents point de cette ligne forment une surface développable, c'est-à-dire que deux de ces normales, infiniment voisines se rencontrent.

Il est aisé de reconnaître que par tout point de la surface il passe deux lignes de courbure rectangulaires, tangentes aux sections principales.

En effet soit M le point considéré, je coupe la surface par un plan infiniment voisin du plan tangent en M et qui lui soit parallèle, j'obtiens une section qui est l'indicatrice.



Je cherche sur cette indicatrice un point G appartenant à une ligne de courbure passant en M ; il doit être tel que la normale en G rencontre la normale en M, MN ; mais elle se projette sur le plan de l'indicatrice suivant la normale en G à celle-ci, cette dernière normale doit donc passer par le point O où MN coupe le plan de l'indicatrice, c'est-à-dire que le point G doit être un sommet de cette conique, on obtient ainsi 4 points situés deux à deux sur deux lignes rectangulaires ; ces points, infiniment voisins de M appartiennent aux sections principales, donc les lignes de courbure sont tangentes en M à ces sections.

Pour traiter la question par le calcul je considère la normale MN au point M de coordonnées x, y, z ; elle a pour équations

$$(t-x)+p\,(v-z)=0 \qquad (1)$$

$$(u-y)+q\,(v-z)=0 \qquad (2)$$

les équations de la normale infiniment voisine, s'obtiennent en ajoutant sa différentielle au premier membre de chacune de celles-ci mais comme on combinera, dans les calculs, ces nouvelles équations avec les précédentes, il suffit simplement de considérer les deux équations obtenues en différentiant les précédentes ; il vient ainsi

$$-dx+dp\,(v-z)-p\,dz=0 \qquad (3)$$

$$-dy+dq\,(v-z)-q\,dz=0 \qquad (4)$$

Pour que les deux normales considérées se rencontrent il faut que ces quatre équations se réduisent à trois ; il suffit pour cela que les équations (3) et (4) donnent la même valeur pour $(v-z)$; c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq} \qquad (\rho)$$

Mais on a comme on sait (avec les notations habituelles)

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

$$dp=r\,dx+s\,dy$$

$$dq=s\,dx+t\,dy$$

l'équation (ρ) devient alors après réductions

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[pqt-s(1+q^2)\right]+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left[(1+p^2)t-r(1+q^2)\right]+\left[s(1+p^2)-rpq\right]=0$$

Cette équation définit les projections sur le plan de x, y de deux directions, celles de deux lignes de courbure passant au point considéré. Comme cette équation ne représente pas les directions dans l'espace on ne peut y constater directement que les lignes de courbure sont rectangulaires. Mais supposons qu'on ait pris le plan des x, y parallèle au plan tangent à la surface au point M. et comme alors pour ce point $p = q = 0$ on voit bien que l'équation définit deux directions rectangulaires en projection et par suite dans l'espace puisqu'elles sont dans un plan parallèle au plan de projection.

D'ailleurs les calculs qui ont amené à cette équation finale et cette équation elle-même sont identiques aux calculs faits et à l'équation trouvée pour définir les directions des sections principales. Donc : Par tout point d'une surface il passe deux lignes de courbure tangentes aux sections principales de la surface en ce point et par suite rectangulaires.

L'équation précédemment trouvée est l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface et l'emploi de cette équation pour trouver les lignes de courbure conduit à un problème de Calcul Intégral.

Lignes de courbure de quelques surfaces. — Les lignes de courbure d'une surface développable sont évidentes ; ce sont, d'une part la génératrice (le lieu des normales élevées aux divers points de la génératrice étant un plan) et d'autre part une courbe orthogonale à toutes les génératrices.

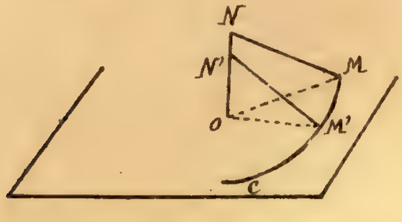
Les lignes de courbure d'une surface de révolution sont d'une part les méridiens, car les normales correspondantes sont dans un même plan, d'autre part les parallèles, car les normales correspondantes forment un cône.

Si l'on considère une surface enveloppe d'une sphère variant d'une manière quelconque, l'une des séries de lignes de courbure est formée par des cercles ; en effet si l'on considère les caractéristiques des sphères enveloppées, ce sont des cercles tout le long desquels le plan tangent à la surface est le même que pour la sphère ; c'est-à-dire que les normales à la sphère le long de ces cercles forment des cônes.

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une section plane d'une surface soit ligne de courbure de cette surface est que la surface fasse en tous les points de la

section le même angle avec le plan.

En effet, pour que la ligne plane C soit ligne de courbure il faut et suffit que les normales MN, M'N' à la surface en deux points M et M' situés à une distance infiniment petite l'un de l'autre (distance que je prendrai comme infiniment petit principal) se rencontrent. Or elles se projettent sur le plan de la courbe suivant



les normales MO, M'O à cette courbe plane. Ces normales se coupent au point O centre de courbure de cette courbe; donc les normales à la surface rencontrent toutes deux la perpendiculaire au plan menée par ce centre, en deux point N et N'; pour que les deux normales se coupent il faut et suffit que les points N et N' coïncident. Mais si l'on désigne par θ et θ' les angles de ces normales avec le plan, on a

$$ON = OM \operatorname{tg} \theta$$
$$ON' = OM' \operatorname{tg} \theta'$$

Mais OM et OM' sont égaux à un infiniment petit près d'ordre supérieur au premier, donc pour que ON et ON' soient égaux il faut que θ et θ' diffèrent seulement d'un infiniment petit d'ordre supérieur au premier; mais cette condition implique que toutes les normales telles que MN fassent le même angle avec le plan considéré (en effet si l'on calcule la différence des angles θ et θ' de deux droites infiniment voisines avec le même plan et qu'on annule les termes du premier ordre, c'est précisément annuler la dérivée de θ, c'est-à-dire écrire que θ est constant).

Pour démontrer le théorème par le calcul je cherche la condition pour que la section d'une surface par le plan des xy soit une ligne de courbure. Soit $z = \varphi(xy)$ l'équation de la surface; une ligne de courbure est définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

Mais pour tous les points de la section plane considérée on a $dz = 0$ l'équation précédente se réduit donc à

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq}$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dp}{dq} \qquad (1)$$

Mais pour tous les points d'une surface on a

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

et par suite, pour tous les points de la section plane considérée on a

$$p\,dx + q\,dy = 0$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-q}{p} \qquad (2)$$

Comparant les égalités (1) et (2) il vient

$$\frac{dp}{dq} = \frac{-q}{p}$$

ou $p\,dp + q\,dq = 0$

Cette équation exprime que $p^2 + q^2$ est constant.

Mais l'angle de la normale à la surface avec OZ (qui est précisément égal à l'angle de la surface avec le plan xOy) a pour cosinus

$$\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Donc si la ligne plane considérée est ligne de courbure cet angle est constant.

Réciproquement si cet angle est constant pour tous les points de la section par le plan des xy, cette courbe est une ligne de courbure.

En effet de l'hypothèse il résulte immédiatement que l'on a pour tous les points de la section

$$p\,dp + q\,dq = 0$$

mais pour tous ces points on a aussi

$$p\,dx + q\,dy = 0$$

de ces deux égalités on déduit

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq}$$

ou encore, puisque dz est nul

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

c'est là précisément l'équation d'une ligne de courbure, dont la section considérée est une ligne de courbure.

C.Q.F.D.

Hélicoïde développable. — Si une surface développable a une ligne de courbure plane autre que ses génératrices, la surface est un hélicoïde développable et alors a une infinité de lignes de courbure planes situées dans des plans parallèles.

En effet le long de la ligne de courbure plane les plans tangents à la surface font le même angle avec la normale au plan de la ligne de courbure et sont donc parallèles aux plans tangents d'un cône de révolution. Les génératrices de la surface qui sont les caractéristiques de ces plans tangents sont alors parallèles aux génératrices du même cône. Elles font toutes le même angle avec la direction de l'axe de ce cône et par conséquent si on considère le cylindre qui projette l'arête de rebroussement parallèlement à l'axe du cône directeur on voit que les tangentes à cette arête de rebroussement qui sont les génératrices de la surface font un angle constant avec les génératrices du cylindre.

La surface est donc un hélicoïde développable.

Tout plan parallèle au plan de la ligne de courbure considérée c'est-à-dire perpendiculaire aux génératrices du cylindre qui porte l'hélice coupe l'hélicoïde suivant une ligne de courbure. Car les plans tangents à la surface le long de cette courbe font évidemment un angle constant avec le plan de la courbe.

Sur un hélicoïde développable nous avons donc comme premier système de lignes de courbure les génératrices rectilignes, et comme second système des sections planes dont les plans sont perpendiculaires aux génératrices du cylindre qui porte l'hélice.

Ces courbes sont les trajectoires orthogonales de ces génératrices et se projettent sur un plan de section droite du cylindre suivant les développantes de cette section droite.

Problème général. — Cherchons quelles sont en général les surfaces qui ont des lignes de courbure planes dans des plans parallèles.

Si nous prenons le plan des xy parallèle aux plans des lignes de courbure. En tous les points d'une même ligne de courbure située dans le plan $z = K$, $p^2 + q^2$ est constant donc pour tout point de la surface $p^2 + q^2$ n'est fonction que de K c'est-à-dire de z l'équation différentielle de ces surfaces est donc

$$p^2 + q^2 = F(z)$$

Si une surface satisfait à cette équation différentielle on peut la transformer en un hélicoïde développable par la

transformation $$z_1 = \varphi(z)$$
φ étant convenablement choisie.

Effectuons en effet cette transformation dans l'équation différentielle trouvée on a :

$$p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} = \varphi'(z)\,p$$

$$q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y} = \varphi'(z)\,q$$

l'équation différentielle devient donc après la transformation

$$p_1^2 + q_1^2 = F(z)\left(\varphi'(z)\right)^2$$

Et l'on voit que si l'on choisit φ de sorte que $F(z)\left(\varphi'(z)\right)^2 = C^{te}$ l'équation différentielle de la surface transformée est

$$p_1^2 + q_1^2 = C^{te}$$

Cette surface est développable puisque p est fonction de q et c'est un hélicoïde développable, puisque le plan tangent fait en tous les points le même angle avec l'axe des z.

Aussi donc toute surface qui a ses lignes de courbure planes et dans des plans parallèles, peut être déduite d'un hélicoïde développable les points correspondants des deux surfaces sont sur de mêmes perpendiculaires aux plans des lignes de courbure. Et l'on voit alors que les projections de ces lignes de courbure sur un de leurs plans, sont des courbes parallèles dont la base du cylindre de l'hélicoïde est la développée commune.

25ème Leçon

25ème Leçon

Normales à une Surface

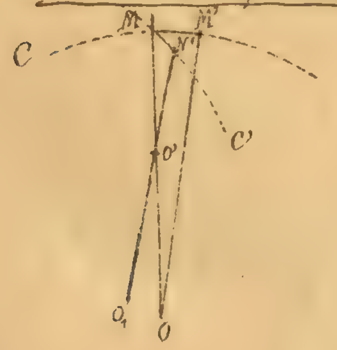
Quand nous avons démontré que par tout point d'une surface passent deux lignes de courbure, nous avons constaté par une identité de calculs que les lignes de courbure étaient tangentes aux deux sections principales au point considéré. Nous pouvions remarquer en même temps que le point de rencontre de la normale à la surface en ce point avec la normale au point infiniment voisin sur une des lignes de courbure était un des centres principaux de courbure.

Les normales le long d'une ligne de courbure C forment, par définition une surface développable sont donc tangentes à une même courbe Γ, arête de rebroussement de cette surface. L'identité précédente montre que cette courbe Γ est le lieu du centre principal de courbure correspondant aux sections normales tangentes à la ligne de courbure C aux différents points de cette ligne.

Si nous considérons une ligne de courbure C_1 du même système et voisine de C les normales correspondantes touchent une courbe Γ_1 voisine de Γ et quand la courbe C engendre la surface donnée; la courbe Γ engendre une surface Σ à laquelle toutes les normales sont tangentes et qui est le lieu de l'un des centres de courbure principaux.

La deuxième série de lignes de courbure C' donne une série de courbes Γ' engendrant une deuxième surface Σ' douées des mêmes propriétés; donc :

Théorème. — <u>Toutes les normales à une surface sont tangentes à la fois à deux surfaces distinctes lieux respectifs des deux centres de courbure principaux.</u>



Considérons la normale MO à la surface donnée au point M et les deux plans de section principale en M. Ces deux plans contiennent les points M', N' infiniment voisins de M sur les lignes de courbure C et C' qui passent en ce point; la normale en N' à la surface passe en

O' centre de courbure de la section principale MN' et de plus est tangente en O, à la surface Σ lieu de l'autre centre de courbure O. O, étant infiniment voisin de O, le plan MN'O' contient deux tangentes MO et OO, à la surface Σ donc c'est le plan tangent à cette surface en O.

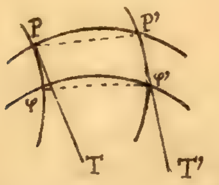
Ce même plan étant tangent suivant MO à la surface développable formée par les normales le long de la ligne C est osculateur à l'arête de rebroussement Γ' de cette surface. Ainsi donc :

Théorème : Si on considère les deux surfaces précédemment définies Σ et Σ' et une même normale MO les touchant en ses centres de courbure principaux O et O' les plans tangents aux deux surfaces en O et O' sont les deux plans de section principale passant par la normale MO et de plus celui de ces plans qui est tangent à Σ en O est osculateur en O' à la courbe Γ' génératrice de Σ' et normal à cette dernière surface.

Application. — Cherchons quelle est la surface pour laquelle les normales sont tangentes à une même sphère Σ.

Les courbes Γ lieu des centres principaux de la surface cherchée et génératrices de la sphère ont leurs plans osculateurs normaux à cette sphère. Ce sont des grands cercles dont les plans enveloppent un certain cône. Si nous considérons un de ces grands cercles la ligne de courbure correspondante de la surface cherchée sera dans son plan la développante du cercle. On a donc ainsi facilement une génération de la surface par des développantes de cercles qui se déplacent de façon que leurs plans enveloppent un cône.

Autre Problème. — Quelle est la surface dont les lignes de courbure sont planes et telles que leurs plans coupent la surface à angle droit.

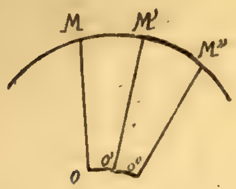


Soit une ligne de courbure, deux points quelconques de cette ligne P, P', les deux lignes de l'autre système qui passent en P et P' et les tangentes PT, P'T' à ces deux lignes, le plan PP' coupant la surface à angle droit et les lignes de courbure étant rectangulaires en P on voit que la tangente PT est perpendiculaire au plan PP' de même la tangente P'T'. Par conséquent si nous déplaçons la ligne de courbure PP' de façon qu'elle coupe toujours normalement les deux lignes Pφ, P'φ' nous voyons que le segment PP' compris entre ces deux lignes sera perpendiculaire aux déplacements de ses extrémités et par suite conservera la même longeur. Or dans ce déplacement la

ligne de courbure reste ligne de courbure. Au lieu d'un segment considérons un polygone inscrit dans une quelconque des lignes de courbure et nous voyons facilement que nous pouvons en inscrire d'identiques dans toutes les lignes du même système. Donc finalement ces lignes de courbure sont identiques.

Dans la génération de la surface par le déplacement de la ligne PP', cette ligne plane reste identique à elle même et son plan est toujours normal aux éléments de surface décrits. Par conséquent ce plan ne fait que tourner autour d'axes instantanés de rotation qu'il contient : Il enveloppe une surface développable et porte une courbe fixée sur lui qui engendre la surface cherchée.

Surface dont un rayon de courbure est constant.—



Supposons cette surface connue et prenons une ligne de courbure correspondant au rayon constant, les rayons de courbure principaux aux points M M' M'' de cette ligne sont égaux, d'ailleurs ils sont perpendiculaires au lieu de leurs extrémités M M' M'' donc ils le sont aussi au lieu de leurs extrémités O O' O''. Ils sont aussi tangents à ce lieu. Ce n'est possible que si ce lieu est un point.

Aussi les normales menées aux différents points d'une ligne de courbure sont concourantes, donc ces points sont sur une même sphère inscrite dans la surface suivant la ligne de courbure. La surface est l'enveloppe d'une sphère et les lignes de courbure ou caractéristiques sont des cercles.

Nous pouvons retrouver ce résultat par le calcul.

Soit une ligne MM' de courbure d'une surface quelconque; les deux normales MO, M'O en deux points infiniment voisins M et M' et O leur point de rencontre.

Projetons OMM' sur l'axe des x en appelant α l'angle de la normale MO avec l'axe des x, nous avons

$$R\cos\alpha + dx - R(\cos\alpha + d\cos\alpha) = 0$$

ou

$$dx = R\, d.\cos\alpha$$

Ceci a lieu tout le long de la ligne de courbure. En intégrant nous voyons que l'on a pour tous les points d'une ligne de courbure

$$x - a = R\cos\alpha$$

de même:

$$y - b = R\cos\beta$$
$$z - c = R\cos\gamma$$

donc $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Pour chaque ligne de courbure il existe un point (a, b, c) tel que sa distance à tout point de la ligne de courbure soit égale au rayon de courbure R en ce point, cette distance étant comptée sur une normale à la surface. Si tout le long de la ligne de courbure R est constant on voit que cette ligne est tracée sur une sphère inscrite à la surface ...... etc ...

Systèmes de droites de l'espace dépendant de deux paramètres.

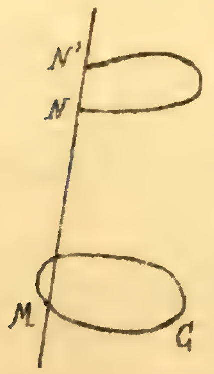
Les droites d'un tel système ne sont pas en général normales à une même surface.

Bien qu'elles soient définies avec le même nombre de paramètres que les normales d'une surface il est impossible de trouver une surface qui les coupe orthogonalement.

On peut se rendre compte de cette impossibilité de la manière suivante :

Je considère une surface quelconque Σ et je cherche à quelles conditions elle serait normale à toutes les droites du système.

Soit une quelconque de ces droites coupant la surface initiale en M et la surface Σ en N. Sur la surface initiale je trace une courbe quelconque C et je considère toutes les droites du système passant par les différents points de C; elles forment une surface réglée qui rencontre Σ suivant une certaine courbe. — Si Σ est normale à toutes les droites du système cette courbe est orthogonale aux génératrices de la surface réglée. Or si à partir du point N je trace la courbe orthogonale aux génératrices de cette surface réglée, elle viendra en général recouper MN en un point N' différent de N, et lorsque je ferai varier la courbe C sur la surface initiale tout en passant par le point M, j'aurai une série de points tels que N' sur MN. — Si la surface Σ existait, elle devrait évidemment couper MN qui lui est normale en tous ces points, ce qui n'est pas possible. La surface Σ ne peut donc exister que si tous les points tels que N' viennent coïncider avec le point N et cela quelle que soit la droite MN que nous avons considérée parmi les droites du système donné ce qui n'est évidemment pas réalisé pour un système de droites quelconques.



Le calcul peut être conduit de la manière suivante. —

Je limite chacune des droites du système donné à une surface

que j'appellerai surface initiale ; par chaque point de cette surface initiale il passe un nombre fini des droites du système.

Soit x, y, z les coordonnées d'un point de la surface initiale X, Y, Z les cosinus directeurs de l'une des droites correspondantes.

S'il existe une surface normale à toutes les droites du système, ses différents points peuvent être obtenus en portant une longueur convenable l (variable avec x, y, z) sur la droite considérée.

Les coordonnées t, u, v du point ainsi obtenu sont données par les formules

$$t = x + lX$$
$$u = y + lY$$
$$v = z + lZ$$

On en déduit en différentiant

$$dt = dx + l\,dX + X\,dl$$
$$du = dy + l\,dY + Y\,dl$$
$$dv = dz + l\,dZ + Z\,dl$$

Pour que la surface lieu du point de coordonnées t, u, v soit normale à la droite considérée, il faut et suffit que l'on ait

$$X\,dt + Y\,du + Z\,dv = 0$$

Je forme cette quantité, le coëfficient de dl est $X^2 + Y^2 + Z^2$ qui est égal à l'unité ; celui de l est nul, car c'est $X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ$, demi différentielle de $X^2 + Y^2 + Z^2$. La condition nécessaire et suffisante pour que la surface cherchée existe est donc que l'on ait

$$(1)\quad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dl = 0$$

D'ailleurs x, y, z étant les coordonnées d'un point de la surface initiale, on a

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

(p et q étant les dérivées partielles de la coordonnée z d'un point de cette surface par rapport aux coordonnées x et y).

L'équation de condition (1) s'écrit donc encore

$$(X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy + dl = 0$$

~~Faisant maintenant~~ Prenant maintenant les coëfficients de dy et dx, , on obtient les expressions des dérivées de l par rapport à x et y

$$\frac{dl}{dx} = -(X + pZ)$$
$$\frac{dl}{dy} = -(Y + qZ)$$

Mais ces deux expressions ne sont pas indépendantes car on doit avoir

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dl}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dl}{dy}\right)$$

ce qui donne une relation entre les 3 fonctions X, Y, Z laquelle n'est généralement pas satisfaite si l'on prend un système quelconque. — On peut remarquer que lorsqu'il en est ainsi, laquelle est satisfaite, la longueur l n'est définie que par la différentielle et par suite à une constante près ; faisant varier l, on obtient une série de surfaces répondant à la question qui sont dites parallèles entre elles.

26ème Leçon

Calcul Intégral

Définition. — Étant donnée une différentielle $F'(x)\,dx$ l'intégrale de cette différentielle est la fonction $F(x)$ dont la différentielle est $F'(x)\,dx$

$$d.F(x) = F'(x)\,dx$$

Cette intégrale se nomme intégrale indéfinie et n'est définie qu'à une constante près. Elle s'écrit :

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C^{te}.$$

Cette écriture $\int F'(x)\,dx$ rappelle que l'intégrale est la somme des différentielles de $F(x)$. La constante arbitraire dépend de la valeur initiale de la variable à partir de laquelle on somme ces différentielles successives.

Quand on fixe cette valeur initiale a, l'écriture devient.

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) + C^{te}.$$

On a immédiatement la valeur de la constante en prenant a comme valeur de la limite supérieure.

$$\int_a^a F'(x)\,dx = 0 = F(a) + C^{te}.$$

d'où l'on conclut que la constante est $-F(a)$

Si maintenant nous fixons la valeur de la limite supérieure x l'intégrale

$$\int_a^b F'(x)\,dx$$

est une quantité déterminée. $= F(b) - F(a)$ c'est une intégrale définie. Dans ce cas on voit que le résultat de l'intégration ne contient pas la lettre x dans l'expression $F'(x)\,dx$ qui se trouve sous le signe $\int$ on peut mettre à la place de x n'importe quelle lettre. Cette expression est simplement destinée à renseigner sur la forme de la fonction F' à intégrer.

On suit par la définition même de l'intégrale que l'on a une représentation géométrique simple de l'intégrale tant définie qu'indéfinie par la considération des aires planes.

Dans ce qui va suivre sur les méthodes d'intégration nous ne considérerons en général que des intégrales indéfinies c'est-à-dire des fonctions primitives.

Méthodes d'intégration

1° Intégration directe. L'intégrale d'une fonction peut être trouvée immédiatement lorsque dans la fonction proposée on reconnaît la dérivée d'une fonction connue.

Exemple:
$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

On a une exception dans le cas de $m = -1$ $\int x^{-1}\,dx = Lx$ on peut déduire ce cas du cas général en fixant la valeur initiale de la variable

$$\int_a^x x^m\,dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

dans le cas $m = -1$ cette fraction prend la forme $\frac{0}{0}$ et on a sa vraie valeur en prenant le rapport des dérivées par rapport à m

$$\frac{x^{m+1}Lx - a^{m+1}La}{1} = (\text{pour } m=-1)\ Lx - La.$$

Dans certains cas bien que la fonction proposée ne soit pas la dérivée d'une fonction connue, on voit que par un simple changement de variable on revient à ce cas:

Exemple: $\int tg x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$ or $\sin x\,dx = -d.\cos x$

Donc on a $\int tg x\,dx = -L\cos x.$

De même on sait que $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,tg\,x$. Donc $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\,\text{arc}\,tg\,x^4$

" " $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x$ " $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\,\text{arc}\sin x^4$

Quelquefois la substitution tout en frappant les yeux, est plus compliquée :

Exemple : $$\int \frac{\cos x\, dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{b}\, L(a + b \sin x)$$

D'autre fois on est ramené à une série d'intégrations immédiates quand sous le signe $\int$ on a une somme de différentielles de fonctions connues :

Ex : $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\,\text{arc}\sin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$

$$\int \sin^4 \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x\,(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

Cette façon d'opérer permet d'intégrer les puissances entières des lignes trigonométriques. Soit :

$\int \cos^n x\, dx$; on exprimera $\cos^n x$ en fonction linéaire des cosinus des arcs multipliés et on intégrera directement chaque terme de la somme ainsi obtenue

2° Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de x on a identiquement

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

On en déduit immédiatement en intégrant

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

ou

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Cette formule est dite formule d'intégration par parties, pour l'appliquer on divise la quantité soumise au signe $\int$ en un produit de deux facteurs u dv dont l'un dv soit une différentielle ~~exacte~~ connue ; l'intégrale cherchée s'obtient en intégrant comme si l'autre facteur u était constant et on corrige en retranchant l'intégrale de la quantité obtenue en différentiant ce facteur dans l'intégrale trouvée.

Toute la difficulté consiste à choisir les facteurs u et dv, de manière que l'intégrale $\int v\,du$ soit plus simple que la proposée. — Il faudra chercher à prendre pour le facteur u une expression dont la dérivée soit simple.

(tels sont Lx, arc tg x, arc sin x etc ....); et pour dV une différentielle dont l'intégrale soit une fonction simple.

Soit par exemple à calculer $\int x^n L(x)\,dx$

Je pose $x^n dx = dV$

$L(x) = u$

on en déduit $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$du = \frac{dx}{x}$

On a donc

$$\int x^n L(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} L(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x}$$

La 2ème intégrale $\int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x} = \int \frac{x^n dx}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

On a donc

$$\int x^n L(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[L(x) - \frac{1}{n+1}\right]$$

Autre exemple: $\int x^m \text{arc sin } x\,dx$ (m entier)

Séparant les deux facteurs $x^m dx$ et arc sin x et intégrant par parties, on a:

$$\int x^m dx.\text{arc sin } x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{arc sin } x - \int \frac{x^{m+1}dx}{(m+1)\sqrt{1-x^2}}$$

tout revient à calculer cette dernière intégrale:

$$\int \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x^m \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^m\sqrt{1-x^2} + m\int x^{m-1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= -x^m\sqrt{1-x^2} + m\int \frac{x^{m-1}(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Décomposant cette intégrale et nous avons entre l'intégrale cherchée et celle plus simple où l'exposant de x est diminué de deux unités, la relation:

$$(m+1)\int \frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^m\sqrt{1-x^2} + m\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si nous remplaçons dans cette relation m par $m-2$ nous serons ramenés à une nouvelle intégrale où l'exposant de x sera encore moindre de deux unités, et ainsi de suite:

Si m est pair nous arriverons à l'intégrale $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$

Si m est impair nous arriverons à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x$

dans les deux cas le problème est résolu

Soit à calculer $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

Séparons les deux facteurs $\cos^{n-1} x$ et $\sin^m x \cos x\, dx$:

$$\int \cos^{n-1} x \sin^m x \cos x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x$$

$$- \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x$$

On retrouve dans le second membre l'intégrale cherchée.

On a donc une formule qui diminue l'exposant de $\cos x$ de deux unités. On continuera facilement.

3°. Intégration par substitution

Soit à calculer l'intégrale $\int \varphi(x)\, dx$ on peut avoir avantage à faire sous le signe $\int$ un changement de variable : soit

$$x = f(z)$$

D'où $\quad dx = f'(z)\, dz$

on a alors l'intégrale $\int \varphi[f(z)] f'(z)\, dz$

Exemple : $\int \arc \sin x\, dx$

posons $\quad \arcsin x = u$

D'où $\quad dx = \cos u\, du$

l'intégrale cherchée devient

$$\int u \cos u\, du = u \sin u - \int \sin u\, du$$

$$= u \sin u + \cos u$$

l'intégrale a donc pour valeur :

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

comme on pouvait facilement le voir directement.

27ème Leçon

27ème Leçon

Intégration des Fractions Rationnelles

On sait que toute fraction rationnelle peut être décomposée en une somme de fractions simples ; dont l'intégration d'une telle fraction se ramène à celle de ces fractions simples.

Cas des racines simples.— Soit une fraction rationnelle $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$; si F est de degré supérieur à φ on divise F par φ et l'on met ainsi la fraction sous la forme $f(x)+\frac{R(x)}{\varphi(x)}$. Le polynôme entier s'intègre immédiatement et la fraction $\frac{R(x)}{\varphi(x)}$ peut être décomposée de la manière suivante :

Soit $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \mu$ les racines du polynôme $\varphi(x)$, supposées racines simples ; on a, comme on sait,

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{C}{(x-\gamma)}\cdots\cdots+\frac{M}{(x-\mu)}$$

A, B, C ..... M étant des constantes déterminées par les formules

$$A=\frac{R(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

$$B=\frac{R(\beta)}{\varphi'(\beta)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$M=\frac{R(\mu)}{\varphi'(\mu)}$$

Ces formules montrent immédiatement que cette décomposition n'est plus possible lorsque l'une des racines est multiple. L'intégration se ramène donc à calculer des expressions de la forme $\int\frac{A\,dx}{x-\alpha}$ qui sont égales à $AL\,(x-\alpha)$

On a donc

$$\int\frac{F(x)}{\varphi(x)}\,dx=\int f(x)\,dx+AL\,(x-\alpha)+BL\,(x-\beta)\cdots\cdots ML\,(x-\mu)$$

Cas des racines multiples.— Supposons maintenant que le polynôme $\varphi(x)$ admettre des racines multiples ; soit α racine multiple d'ordre n, β d'ordre p etc.......

Nous mettrons comme précédemment la fraction sous la forme $f(x)+\frac{R(x)}{\varphi(x)}$. La fraction $\frac{R(x)}{\varphi(x)}$ peut comme on sait être décomposée en une somme d'expressions telles que la suivante :

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} \cdots\cdots \frac{A_i}{(x-\alpha)^i} \cdots\cdots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

à chaque racine de φ correspond une telle somme contenant autant de termes qu'il y a d'unités dans le degré de multiplicité de la racine considérée. L'intégration se ramènera donc à celle de $f(x)$ qui est immédiate et à celle d'expressions telles que $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}\,dx$; dans le cas où $i=1$ on a vu que cette intégrale est $A_i\,L\,(x-\alpha)$; si i est différent de 1 on reconnaît immédiatement dans cette expression, qui s'écrit encore $A_i\,(x-\alpha)^{-i}\,dx$, la différentielle de $A_i\frac{(x-\alpha)^{-i+1}}{-i+1} = \frac{A_i}{1-i}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{i-1}}$. Nous savons donc intégrer chacun des éléments simples qui figurent dans la décomposition de la fraction proposée, ce qui conduit à l'intégrale de cette fraction.

Cas des racines imaginaires. — Dans tout ce qui précède nous avons supposé que les racines du dénominateur de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ étaient réelles. Si nous supposons maintenant que le polynôme $\varphi(x)$ admet des racines imaginaires, nous pouvons encore appliquer la méthode précédente, mais elle introduira des imaginaires dans les calculs ; on pourra les faire disparaître dans le résultat, mais le calcul serait souvent long, et il est en général préférable de n'opérer que sur des quantités réelles.

Supposons d'abord que les racines imaginaires de $\varphi(x)$ sont simples, elles se groupent alors deux par deux en racines conjuguées qui correspondent à un facteur de la forme $(x-\alpha)^2+\beta^2$ dans le polynôme $\varphi(x)$.

Si l'on décompose la fraction rationnelle proposée en éléments simples, on obtient une série d'éléments correspondant aux racines réelles, qui sont ceux que nous avons rencontrés précédemment et que nous savons intégrer ; à chaque couple de racines imaginaires conjuguées correspond un élément de la forme

$$\frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

On est donc ramené à calculer l'intégrale

$$\int\frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int\frac{P(x-\alpha)+(Q+P\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int\frac{P(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + \int\frac{(Q+P\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

La première de ces intégrales est à un facteur près de la forme $\int\frac{du}{u}$, c'est donc un logarithme ; la deuxième est de la forme $\int\frac{dv}{a^2+v^2}$ c'est comme nous l'avons vu un arc tangente, et l'on a :

$$\int \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\, dx = \frac{P}{2}\, L\, \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + \frac{Q+P\alpha}{\beta}\, \text{arc tg}\, \frac{x-\alpha}{\beta}$$

Cas des racines imaginaires multiples. — Supposons enfin que le polynôme $\varphi(x)$ admette des racines imaginaires multiples; elles seront deux à deux conjuguées et du même ordre de multiplicité, elles correspondront donc à un facteur de $\varphi(x)$ de la forme $\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n$; et on suit qu'un tel facteur donne lieu dans la décomposition en fractions simples à une somme de la forme

$$\frac{P_1 x + Q_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{P_2 x + Q_2}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^2} \cdots\cdots\cdots \frac{P_n x + Q_n}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}$$

On est donc ramené à intégrer l'expression

$$\frac{P_n x + Q_n}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}\, dx$$

Nous avons déjà traité le cas où $n = 1$

Supposons $n \neq 1$

On a $$\int \frac{(P_n x + Q_n)\, dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n} = \int \frac{P_n (x-\alpha)\, dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n} + \int \frac{(P_n \alpha + Q_n)\, dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}$$

La première intégrale peut s'écrire

$$\frac{P_n}{2} \int \frac{2(x-\alpha)\, dx}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}$$

c'est une intégrale de la forme $\int \frac{du}{u^n} = \int u^{-n}\, du = \frac{u^{1-n}}{1-n}$ la première intégrale est donc égale à

$$\frac{P_n}{2(1-n)} \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^{1-n}$$

Reste à calculer la deuxième intégrale

$$\frac{P_n \alpha + Q_n}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}\, dx$$

si l'on pose $(x-\alpha) = \beta z$, cette intégrale devient

$$\int \frac{Q_n + P_n \alpha}{\beta^{2n-1}} \frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

Toute la question est donc ramenée au calcul de l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$

je désigne $\int \frac{dz}{(z^2+1)^m}$ par P_m

On a évidemment $P_m = \int \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^m}\, dz = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^m}$ (1)

La première de ces deux intégrales, est l'intégrale proposée dans laquelle on a remplacé m par $m-1$, je la désigne par P_{m-1}; pour calculer la deuxième je remarque que

$$\frac{z\, dz}{(1+z^2)^m} = z\, dz\, (1+z^2)^{-m} = \frac{d\,(1+z^2)^{-m+1}}{2\,(1-m)}$$

l'intégration des parties donne donc

$$\int \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z\,(1+z^2)^{1-m}}{2\,(1-m)} - \int \frac{(1+z^2)^{1-m}\, dz}{2\,(1-m)}$$

Mais la dernière de ces intégrales est précisément $\frac{1}{2(1-m)} P_{m-1}$. Portant dans l'équation (1) il vient

$$P_m = P_{m-1} + \frac{z}{2\,(m-1)\,(1+z^2)^{m-1}} - \frac{1}{2\,(m-1)} P_{m-1}$$

ou, toutes réductions faites

$$P_m = \frac{2m-3}{2m-2} P_{m-1} + \frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}}$$

Cette formule de réduction permet de ramener l'intégrale proposée à une autre de même forme dans laquelle l'exposant de $(1+z^2)$ est d'une unité plus faible; on arrivera de proche en proche à l'intégrale $P_1 = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg} z$.

le problème est donc résolu et l'on sait intégrer toute fraction rationnelle. Il est cependant bien des cas où la méthode que nous avons indiquée conduit à des calculs beaucoup plus longs qu'il n'est nécessaire.

C'est d'abord le cas où le numérateur serait à un facteur près la dérivée du dénominateur, auquel cas l'intégrale serait le logarithme du dénominateur; il y a bien d'autres cas qui ne peuvent pas rentrer dans des règles générales.

Calcul de la constante de la formule de Stirling.

Considérons l'intégrale définie

$$P_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Nous venons de trouver pour l'intégrale indéfinie la formule

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Or pour $x = 0$ comme pour $x = \infty$ le premier terme du second membre est nul; donc nous avons pour les intégrales définies la formule simple

$$Pn = \frac{2n-3}{2n-2} \; Pn-1$$

de même $Pn-1 = \dfrac{2n-5}{2n-4} \; Pn-2$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$P_2 = \frac{1}{2} \; P_1$$

Or $P_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\,\infty - \text{arc tg}\,0 = \frac{\pi}{2}$; donc en multipliant ces égalités membre à membre on a pour valeur de Pn

$$Pn = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.\; 3.\; \ldots\ldots\; (2n-3)}{2.\; 4.\; \ldots\ldots\; (2n-2)}$$

Supposons que n est infiniment grand et posons $x = \dfrac{y}{\sqrt{n}}$, nous avons

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{n}} \text{ et par suite } Pn = \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{n}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}$$

n étant infiniment grand, la valeur limite de l'expression placée sous le signe $\int$ est

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \; e^{-y^2} \, dy$$

On a donc alors comme valeur limite de Pn

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy$$

Or $Pn = \dfrac{\pi}{2} \; \dfrac{1.\, 3 \ldots\; (2n-3)}{2.\, 4 \ldots\; (2n-2)} = \dfrac{\pi}{2} \; \dfrac{(2n-2)\,!}{2^{2n-2}\left[(n-1)\,!\right]^2}$

Or par la formule de Stirling nous avons $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n}\, G$
G étant la constante que nous nous proposons de calculer.

Remplaçons les factorielles $(2n-2)!$ et $(n-1)!$ par leur valeur et nous avons

$$Pn = \frac{\pi}{2} \; \frac{(2n-2)^{2n-2} \, e^{-2n+2} \sqrt{2n-2}\; G}{2^{2n-2} (n-1)^{2n-2} \, e^{-2n+2} (n-1) \, G^2} = \frac{\sqrt{2n-2}}{n-1} \; \frac{\pi}{2G}$$

faisons n infini dans cette formule : elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{2n-2}}{n-1} \quad \frac{\pi}{2G}$$

$$\text{c'est-à-dire} \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\pi}{G\sqrt{2}}$$

Reste à calculer $\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy$ pour avoir la valeur de G.

Nous avons supposé dans ce calcul n infini; or la formule de Stirling n'a aucun sens dans ce cas.

Nous n'avions qu'à faire n très grand; nous aurions eu les mêmes résultats en négligeant des quantités très petites comparables à l'approximation même de la formule.

Seconde manière de déterminer G. — Considérons l'intégrale définie

$$P_n = \int_0^1 \frac{dx\, x^n}{\sqrt{1-x^2}}$$

On a $$\int x^{n-1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int x^{n-2} dx \sqrt{1-x^2}$$

$$n\int x^n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Or pour $x = 0$ et pour $x = 1$ le premier terme du 2ème membre est nul on a donc $$n P_n = (n-1) P_{n-2}$$

1° Soit n pair $= 2m$ on a : $$P_{2m} = \frac{2m-1}{2m} P_{2m-2}$$

De même $$P_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2} P_{2m-4}$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$P_2 = \frac{1}{2} P_0$$

Or $$P_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } 1 - \text{arc sin } 0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc :}$$

$$\text{(I)} \qquad P_{2m} = \frac{1.\,3 \ldots\ldots (2m-1)}{2.\,4 \ldots\ldots 2m} \; \frac{\pi}{2}$$

2° Si n est impair $= 2m+1$ la formule de récurrence donne $$P_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} P_{2m-1}$$

$$P_{2m-1} = \frac{2m-2}{2m-1} P_{2m-3}$$

$$\text{. . . . .}$$

$$P_3 = \frac{2}{3} P_1$$

On a $P_1 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ donc :

$$\text{(II)} \qquad P_{2m+1} = \frac{2.4\ldots\ldots 2m}{1.3\ldots\ldots 2m+1}$$

Divisons les deux formules (I) et (II) l'une par l'autre le rapport $\frac{P_{2m}}{P_{2m+1}}$ tend vers 1 quand m augmente indéfiniment. en effet.

P_{2m} est compris entre P_{2m-1} et P_{2m+1} comme on peut s'en assurer par les formules I et II, car l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ décroît évidemment quand n augmente

$$\frac{P_{2m-1}}{P_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$$

ce rapport tend vers 1 quand m augmente indéfiniment donc à fortiori le précédent.

Donc approximativement pour m très grand on a

$$\text{(III)} \qquad 1 = \frac{\pi}{2} \frac{[1.3.5\ldots(2m-1)]^2 (2m+1)}{(2.4.6\ldots 2m)^2} = \frac{\pi}{2}(2m+1)\frac{(1.2.3\ldots 2m)^2}{2^{4m}(1.2.3\ldots m)^4}$$

Evaluant comme précédemment les factorielles par la formule de Stirling et considérant m comme infini ; nous arrivons à cette valeur de G :

$$1 = \frac{2\pi}{G^2} \quad \text{ou} \quad G = \sqrt{2\pi}$$

la formule de Stirling est donc

$$1.2\ldots\ldots n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Remarque. La formule III trouvée précédemment donne l'expression de π sous forme d'un produit d'un nombre indéfini de facteurs.

On a pour m infini $\frac{\pi}{2} = \frac{(2.4\ldots\ldots 2m)^2}{(1.3.5\ldots\ldots 2m-1)^2(2m+1)}$

$$\text{D'où} \quad \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \text{ . . . .}$$

$$= \left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\cdots\cdots$$

Cette propriété est connue sous le nombre de théorème de Wallis.

28ème Leçon

Problème : Soit à calculer l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$$

m et n étant deux nombres entiers.

Nous devons tout d'abord reconnaître que pour que cette expression ait un sens il faut $m < n$. S'il n'en était pas ainsi l'ordonnée de la courbe $y = \dfrac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ ne serait pas nulle pour x infini et la surface représentée par l'intégrale définie serait somme algébrique de quantités non toutes finies.

Il ne suffit pas pour que l'intégrale cherchée ait une valeur bien définie que la fonction $\dfrac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ soit nulle pour x infini ; il faut encore que pour x infini la fonction primitive ait une valeur finie.

~~Donc pour voir si l'on peut et dans quel cas on peut accepter les limites $\pm\infty$ il faut commencer par faire l'intégration.~~

[Note marginale, partiellement coupée : $\int_{-\infty}^{\infty} = 2\int_0^{\infty} = 2\int_0^1 + 2\int_1^{\infty}$ … certainement finie … la partie … intégr… limites le sont ; … $\frac{x^{2m}}{x^{2n}}dx$ … $x^{2m-2n}dx$ … $\int_1^{\infty} x^{2m-2n}dx = \left(\frac{x^{2m-2n+1}}{2m-2n+1}\right)_1$ … tion intégrale est … unique $m \leq n-1$ … d. $2m-2n+1<0$ … propriété est donc … et la preuve … tenue sans avoir … effectuer une … quelquefois]

Pour intégrer cette fraction rationnelle décomposons la en éléments simples : considérons les racines du dénominateur. Soit, $\alpha + \beta i$, une de ces racines, nous aurons dans la décomposition la fraction correspondante

$$\frac{A + Bi}{x - \alpha - \beta i}$$

mais à cette racine en correspond une autre imaginaire conjuguée $\alpha - \beta i$ qui donnera la fraction conjuguée

$$\frac{A - Bi}{x - \alpha + \beta i}$$

Pour n'avoir que des termes réels dans le développement réunissons les éléments imaginaires conjugués. Nous aurons alors des fractions de la forme

$$\frac{2A\,(x-\alpha) - 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

l'intégrale de cette fraction dans les limites $\pm\infty$ n'a pas de valeur déterminée. En effet, l'intégrale indéfinie est :

$$\int \frac{2A(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} - \int \frac{2B\beta\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = AL\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] - 2B \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha}{\beta}$$

Si nous prenons les limites $\pm\infty$ la première partie prend la forme $\infty - \infty$; pour bien nous rendre compte qu'il y a indétermination prenons les limites $-h$, $+g$

$$\int_{-h}^{+g} \frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = AL \frac{\left[(g-\alpha)^2+\beta^2\right]}{\left[(h+\alpha)^2+\beta^2\right]}$$

Si nous considérons h et g comme infiniment grands, le second membre se réduit à

$2AL.\ \frac{g}{h}$ et l'on voit que l'expression dépend de $\frac{g}{h}$ et que par conséquent il n'y a pas de limite déterminée pour l'intégrale considérée quand on fait croître indéfiniment les deux limites.

Au contraire la seconde partie.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2B\beta\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

a une valeur bien déterminée qui est $2B\pi$.

On voit que l'intégrale de chaque fraction du développement est

$$2AL\ \frac{g}{h} - 2B\pi$$

Il semble donc que la somme de toutes ces intégrales doit dépendre de $\frac{g}{h}$ et par conséquent être indéterminée.

Seulement il se trouve que la somme des A est nulle et que l'intégrale cherchée se réduit à : $-2\pi.\ \Sigma.B_k$

Pour avoir la valeur de l'intégrale cherchée nous n'avons donc qu'à calculer les valeurs de $B_0, B_1, \ldots\ldots\ldots B_{n-1}$ correspondant aux différents groupes de racines imaginaires conjuguées de l'équation. $x^{2n}+1=0$ la forme générale des racines de cette équation est

$$\alpha_k = \cos\frac{(2K+1)\pi}{2n} + i \sin\frac{(2K+1)\pi}{2n}$$

qui donnera toutes les racines quand on y fera successivement

$$K = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 2n-1.$$

Or si nous donnons à K deux valeurs ayant pour somme $2n-1$ les deux racines correspondantes seront imaginaires conjuguées et donneront la même valeur absolue pour B.

Par conséquent pour avoir toutes les valeurs $B \ldots\ldots B_{n-1}$ nous n'avons qu'à considérer les racines obtenues dans l'expression générale :

$$K = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ n-1$$

Soit α_K une de ces racines, la fraction simple correspondante est

$$\frac{P_K}{x-\alpha_K}$$

où $P_K = \dfrac{\alpha_K^{2m}}{2n\,\alpha_K^{2n-1}} = -\dfrac{\alpha_K^{2m+1}}{2n} = -\dfrac{1}{2n}\left[\cos\dfrac{(2m+1)(2K+1)\pi}{2n} + i\sin\dfrac{(2m+1)(2K+1)\pi}{2n}\right]$

la valeur de B correspondante est donc

$$B_K = -\frac{1}{2n}\sin(2K+1)\theta$$

en posant $\qquad \theta = \dfrac{(2m+1)\pi}{2n}$

l'intégrale définie cherchée a donc pour valeur

$$-2\pi\,\Sigma.\,B_K = \frac{\pi}{n}\sum_{K=0}^{K=n-1}\sin(2K+1)\theta.$$

en effectuant la somme qui est dans le second membre on la trouve égale à $\dfrac{1}{\sin\theta}$ et par conséquent l'intégrale a pour valeur

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

Le calcul s'est appuyé sur ce que la somme des coëfficients $A_0,\ A_1,\ \ldots\ldots\ A_{n-1}$ du développement :

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} = \frac{2A_0(x-\alpha_0)-2B_0\beta_0}{(x-\alpha_0)^2+\beta_0^2} + \cdots\cdots + \frac{2A_{n-1}(x-\alpha_{n-1})-2B_{n-1}\beta_{n-1}}{(x-\alpha_{n-1})^2+\beta_{n-1}^2}$$

est nulle.

La vérification en est immédiate : multiplions les deux membres de cette identité par $1+x^{2n}$, comme n est plus grand que m on a aussi $2n-1 > 2m$
donc le coëfficient de x^{2n-1} dans le second membre doit être nul, c'est précisément $A_0 + A_1 + \cdots\cdots + A_{n-1}$.

Intégration des Fonctions irrationnelles

En général quand la différentielle placée sous le signe $\int$ contient des radicaux il n'y a pas de méthode générale sûre pour faire l'intégration.

Il y a cependant deux cas dans lesquels l'intégration est toujours possible :

1° Quand la différentielle ne contient qu'un radical de la forme

$$\sqrt[n]{ax+b}$$

2° quand elle ne contient qu'un radical de la forme

$$\sqrt{a+bx+cx^2}$$

Premier cas

Soit à calculer l'intégrale $\int F\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$ dans laquelle F est une fonction rationnelle ; on pose :

$$\sqrt[n]{ax+b} = z$$

on en tire : $x = \dfrac{z^n - b}{a}$ et $dx = \dfrac{n z^{n-1} dz}{a}$

On a alors à intégrer une fonction rationnelle :

$$F\left(\frac{(z^n - b)}{a}, z\right) \frac{n z^{n-1} dz}{a}$$

Deuxième cas

Soit à calculer l'intégrale : $\int F\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx$

Pour rendre l'expression rationnelle on peut,

1° poser $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a} + xz$

d'où $b + cx = 2z\sqrt{a} + xz^2$

$$x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{z^2 - c} \quad \text{et } dx = 2dz \; \frac{\sqrt{a} + xz}{c - z^2}$$

Cette transformation n'introduit pas d'imaginaires quand a est > 0.

2° poser $\sqrt{a + bx + cx^2} = x\sqrt{c} + z$; on voit encore que x et dx sont fonctions rationnelles de z ; cette transformation est préférable quand c est > 0.

3° si a et c sont tous deux négatifs, et les racines du binome réelles, on posera de préférence

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = (x - \alpha)z, \quad \alpha \text{ étant une des racines.}$$

Enfin si a et c étant négatifs, les racines sont imaginaires, le binome placé sous le radical est toujours négatif et il n'y a pas lieu de chercher à éviter les imaginaires une des trois méthodes précédentes pourra être employée et introduira le signe i.

Exemples. : I° $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ on pose $\sqrt{1+x^2} = x + z$ on est ramené à l'intégrale

$$-\int \frac{4z\,dz}{(1-z^2)^2} = -\frac{2}{1-z^2}$$

$$\text{Donc : } \quad \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{2}{1-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}$$

Dans ce cas il vaut mieux opérer directement sans changement de variable. Supposons que le multiplicateur du radical soit x^n et non x^2

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx.x}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)\int \sqrt{1+x^2}\;\frac{dx}{x^{n+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)\int \frac{dx}{x^{n+2}\sqrt{1+x^2}} + (n+1)\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$$

on a donc la formule

$$-n\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1)\int \frac{dx}{x^{n+2}\sqrt{1+x^2}}$$

si l'on y fait $n = 0$, on a :

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$$

II° $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ on pose $\sqrt{1+x^2} = x + z$ et on est ramené à l'intégrale

$$- \int \frac{4z\,dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2}{1+z^2} = \frac{2}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2}$$

On aurait pu ne pas changer de variable et appliquer simplement la formule de recurrence trouvée pour $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, le calcul fait pour cette intégrale ne supposant nullement n entier.

29ème Leçon

Il est souvent plus court dans l'intégration des irrationnelles du second degré quand les radicaux sont simples, de les remplacer par fonctions trigonométriques en faisant un changement de variable.

Exemple : $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; nous avons dans la leçon précédente calculé cette intégrale par la méthode générale :

posons $x = tg\,\varphi$., d'où $dx = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$

l'intégrale devient : $\int \frac{d\varphi \cos\varphi}{\cos^2\varphi\, tg^2\varphi} = \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

Fonctions de sin x et cos x. — Soit une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, $F(\sin x, \cos x)$ il est aisé de calculer l'intégrale

$$\int F(\sin x, \cos x)\, dx$$

En effet si je pose $\sin x = z$, on a $\cos x = \sqrt{1-z^2}$ et $dz = dx \cos x$.
l'intégrale proposée devient alors

$$\int \frac{F(z, \sqrt{1-z^2})}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

La fonction à intégrer est une fonction qui n'est rendue irrationnelle que par la présence du radical $\sqrt{1-z^2}$, nous savons donc l'intégrer, pour cela nous prendrons une nouvelle variable; on pourrait par exemple poser $t = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$, ce qui revient à poser $t = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. Il est plus simple de faire immédiatement un changement de variable équivalent $t = tg\,\frac{x}{2}$; on sait que $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment rationnellement en fonction de t (par les formules $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$) il en sera de même de dx (on a $x = 2\,\text{arc}\,tg\,z$ et par suite $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$) on obtiendra donc après ce changement de variable une fonction rationnelle de t que l'on saura intégrer.

Il y a naturellement un grand nombre de cas où le calcul peut être fait plus simplement.

Soit par exemple à calculer

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

m et n étant deux nombres entiers positifs ou négatifs.

Si m et n sont tous deux positifs on peut exprimer le produit $\sin^m x \cos^n x$ à l'aide des sinus et cosinus des multiples de l'arc x, on peut alors immédiatement intégrer par décomposition.

Dans le cas général on peut procéder par réductions successives pour cela j'intègre par parties : j'écris l'intégrale proposée

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \sin^m x \cos x \, dx$$

mais $\sin^m x \cos x \, dx = d\,\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, il vient donc

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

mais $\sin^{m+2} x = \sin^m x \, (1 - \cos^2 x)$

la dernière intégrale peut donc encore s'écrire

$$\frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

et l'on a la formule de réduction

$$\frac{m+n}{m+1} \int \sin^m x \cos^n dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

Si l'on suppose $m \neq -1$ on peut supprimer le dénominateur $m+1$ qui se trouve dans tous les termes des deux membres;

si $m = -1$, il n'est pas évident que la formule soit encore applicable, mais on le vérifie immédiatement en différentiant les deux membres.

Cette formule n'est avantageuse que si $n-2$ est en valeur absolue inférieur à n, c'est-à-dire si n est positif. Si n est négatif il suffira évidemment de renverser la formule.

En appliquant cette formule, on réduira l'exposant de $\cos x$ à 1 ou 0 suivant la parité de n ; il est évident qu'on obtiendrait de même une formule permettant de réduire de deux unités l'exposant de $\sin x$.

On ramènera donc la question au calcul de l'une des intégrales $\int dx$ (si m et n sont pairs), $\int \sin x\, dx$ (si n est pair et m impair) $\int \cos x\, dx$ (si m est pair et n impair) et enfin $\int \sin x\, dx$ (si n est pair et m impair) $\int \cos x\, dx$ (si m est pair et n impair) et enfin $\int \sin x \cos x\, dx$ (si m et n sont impairs); toutes ces intégrales s'obtiennent immédiatement pour la dernière il suffit de remarquer que $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Le calcul peut être conduit de manière différente dans certains cas particuliers.

Supposons d'abord que l'un des exposants m ou n soit impair et positif, soit par exemple $m = 2\mu + 1$, on a

$$\int \sin^{2\mu+1} \cos^n x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^\mu \cos^n x \sin x\, dx$$

Développant $(1-\cos^2 x)^\mu$ par la formule du binôme on décompose l'intégrale proposée en une somme d'intégrales de la forme

$$\int \cos^K x \sin x\, dx = \int \cos^K x\, d(\cos x) = \frac{-\cos^{K+1} x}{K+1}$$

Dans le cas où c'est l'exposant de $\cos x$ qui est impair, le calcul se conduit de la même manière

Supposons que l'intégrale puisse se mettre sous la forme

$$\int tg^m x \frac{dx}{\cos^{2K} x}$$

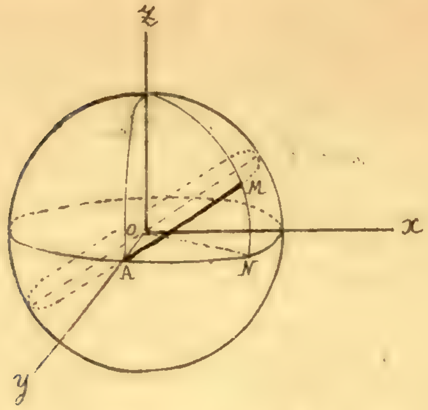
K étant un nombre entier et positif, c'est-à-dire que n soit supérieur à m et que leur différence soit un nombre entier pair. L'intégrale proposée peut dans ce cas s'écrire

$$\int tg^m x \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \frac{1}{\cos^{2(K-1)} x} = \int tg^m (x) (1+tg^2 x)^{K-1} d(tg\, x)$$

Mais K étant entier et positif on peut développer $(1+tg^2 x)$

par la formule du binôme, et décomposer l'intégrale en une série d'autres de la forme $\int tg^h x \, d(tg x)$ cette dernière intégrale est évidemment égale à $\frac{tg^{h+1} x}{h+1}$, ce qui permet de calculer la proposée.

Application. — Longueur d'un arc de grand cercle d'une sphère.



Soit la sphère O rapportée à 3 axes rectangulaires, le grand cercle de cette sphère situé dans le plan $z = mx$ et l'arc de ce grand cercle compris entre le méridien A et le méridien M, nous nous proposons d'évaluer cet arc.

Si nous prenons sur la sphère les coordonnées θ et ψ accoutumées l'équation du grand cercle est

$$(1) \quad \cot g\, \theta = m \cos \psi$$

Or la différentielle de l'arc de courbe sur la sphère est

$$(2) \quad ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\psi^2$$

Par l'équation (1) nous voyons que pour le grand cercle:

$$\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = m \sin\psi \, d\psi$$

$$\text{et } \sin^2\theta = \frac{1}{1 + m^2\cos^2\psi}$$

Donc le long de ce grand cercle, la différentielle ds a pour expression en prenant ψ comme variable:

$$ds^2 = d\psi^2 \left(\frac{m^2 \sin^2\psi}{(1+m^2\cos^2\psi)^2} + \frac{1}{1+m^2\cos^2\psi} \right)$$

$$ds = -d\psi \quad \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2\cos^2\psi}$$

Nous avons choisi le signe — parce que on voit facilement sur la figure que s compté de A vers M augmente quand ψ diminue. — Il reste à intégrer ds de $\psi = \frac{\pi}{2}$ à $\psi = \psi_0$ (valeur de ψ en M) pour avoir l'arc AM.

$$\text{Or} \quad \int - \frac{\sqrt{1+m^2}\, d\psi}{1+m^2\cos^2\psi} = \int - \frac{\dfrac{d\psi}{\cos^2\psi \sqrt{1+m^2}}}{1 + \dfrac{tg^2\psi}{1+m^2}} = \text{arc cotg} \quad \frac{tg\,\psi}{\sqrt{1+m^2}}$$

Or si on appelle A l'angle du plan $z = mx$ avec le plan $0xy$, m est égal à $tg\,A$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \cos A$, on a donc entre les limites fixées

$$\text{arc } \widehat{AM} = s = \text{arc cotg } (tg\,\psi_0 \cos A)$$

D'où $\quad \text{cotg } s = tg\,\psi_0 \cos A$

ou encore $\quad \cos A = \dfrac{\text{cotg } \psi_0}{tg\,s} = \dfrac{tg\,\widehat{AN}}{tg\,\widehat{AM}}$

formule qui dans le triangle sphérique rectangle AMN est l'expression d'un théorème connu de trigonométrie sphérique.

Autre Calcul. — Nous aurions pu dans l'expression de ds prendre θ pour variable au lieu de ψ

Nous avons $\quad ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2$

et $\quad \text{cotg } \theta = m \cos \psi$

de la deuxième relation, nous tirons :

$$\frac{d\theta}{\sin^2\theta} = m \sin\psi\, d\psi$$

$$m^2 \sin^2\psi = m^2 - \text{cotg}^2\theta$$

D'où : $\quad ds^2 = d\theta^2 \left[1 + \dfrac{1}{\sin^2\theta(m^2 - \text{cotg}^2\theta)}\right] = d\theta \dfrac{(m^2+1)\sin^2\theta}{m^2\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

Remarquant que s augmente quand θ diminue

$$ds = -\frac{d\theta \sin\theta \sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2\sin^2\theta - \cos^2\theta}}$$

Cette intégration qui semble impossible si l'on ne songe qu'aux méthodes générales se fait facilement par un artifice particulier : nous pouvons écrire

$$ds = \frac{-d\theta \sin\theta \sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{1+m^2}{m^2}\cos^2\theta}}$$

Donc : $\quad s = \text{arc sin } \dfrac{\cos\theta \sqrt{m^2+1}}{m} = \text{arc sin } \dfrac{\cos\theta}{\sin A}$

il faut intégrer entre les limites $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $\theta = \theta_0$ (valeur de θ en M.) on a donc

$$s = \text{arc } \widehat{AM} = \text{arc sin } \frac{\cos\theta_0}{\sin A}$$

$$\text{ou } \sin A = \frac{\sin \widehat{MN}}{\sin \widehat{AM}}$$

Ce qui vérifie dans le triangle AMN une autre propriété des triangles sphériques rectangles.

Différentielles binômes. — On appelle différentielles binômes une expression de la forme

$$x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

où m, n, p sont des nombres quelconques.

On ne sait intégrer ces différentielles que dans deux cas particuliers, ceux où l'un des deux nombres $\frac{m+1}{n}$ ou $\frac{m+1}{n}+p$ est entier et l'on ne connaît aucun cas d'intégrabilité qui ne rentre pas dans l'un de ces deux cas généraux (sauf naturellement le cas où p est entier auquel cas on ramène immédiatement à une fonction rationnelle).

Premier cas : $\frac{m+1}{n}$ entier. — Supposons d'abord que $\frac{m+1}{n}$ soit entier.

$$\text{Je pose } (a+bx^n) = z$$

$$\text{J'en déduis } x^n = \frac{z-a}{b}$$

$$\text{et en différentiant } n x^{n-1} dx = \frac{dz}{b}$$

L'intégrale proposée $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, prend la forme

$$\int \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \frac{z^p \, dz}{nb \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{m}}} = \int \frac{z^p}{nb} (z-a)^{\frac{m-n+1}{n}} dz$$

Mais j'ai supposé $\frac{m+1}{n}$ entier, il en sera de même $\frac{m-n+1}{n} = \alpha$ et l'intégrale à calculer est de la forme

$$\int A z^p (z-a)^\alpha dz$$

α étant entier ; le nombre p peut être fractionnaire et de la forme $\frac{\mu}{\nu}$, je pose $z^{\frac{1}{\nu}} = y$

il vient alors $z = y^\nu \quad dz = \nu y^{\nu-1} dy$ et l'intégrale prend la forme

$$\int \nu A \; y^\mu \; (y^\nu - a)^\alpha \; y^{\nu-1} \, dy$$

Les exposants μ, ν et α étant entiers on est ramené à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Deuxième cas : $\frac{m+1}{n}+p$ entier. Supposons maintenant $\frac{m+1}{n}+p$ entier ; la fonction proposée se ramène immédiatement à

la forme précédente en posant $x = \frac{1}{z}$, en effet on en déduit $dx = -\frac{dz}{z^2}$ et l'intégrale proposée devient

$$\int \frac{1}{z^m}\left(a + \frac{b}{z^n}\right)^p\left(-\frac{dz}{z^2}\right) = -\int z^{-m-np-2}\,(az^n+b)^p\,dz$$

On a ramené la différentielle binôme à une nouvelle, pour laquelle $\frac{m'+1}{n'}$ est entier : en effet on a

$$m' = -m-np-2$$
$$n' = n$$

et par suite $\frac{m'+1}{n'} = \frac{-m-np-1}{n} = -\left(\frac{m+1}{n}+P\right)$

ce dernier nombre est entier par hypothèse, la différentielle binôme proposée est donc intégrable. Mais ce changt de variable est même inutile car il suffit d'écrire la différentielle ainsi : $(ax^{-n}+b)x^{m+np}dx$ pour qu'elle rentre dans le cas précédent

Autre méthode. Étant donné une différentielle binôme quelconque pour laquelle on a $\frac{m+1}{n}$ entier, on peut encore l'intégrer par réductions successives ; en effet on a

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1}dx$$

$$(a+bx^n)^p x^{n-1}dx = \frac{1}{n(p+1)b}\,d(a+bx^n)^{p+1}$$

Il vient donc en intégrant en parties

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \int\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}(m-n+1)x^{m-n}dx \quad (1)$$

On a ramené l'intégrale proposée à une autre dans laquelle l'exposant p est augmenté d'une unité, et l'exposant m diminué de n unités. Si on recommence plusieurs fois cette même réduction, on ramènera successivement l'exposant m aux valeurs $m-n$, $m-2n$, ... $m-qn$. Or si $\frac{m+1}{n}$ est entier et égal à $q+1$, $m-nq$ est égal à $(n-1)$ et l'on a ramené l'intégrale proposée à la forme

$$\int Ax^{n-1}dx\,(a+bx^n)^K$$

$$\text{mais } x^{n-1}dx = \frac{d(a+bx^n)}{nb}$$

l'intégrale s'écrit donc

$$\frac{A}{nb}\int(a+bx^n)^p d(a+bx^n) = \frac{A}{nb}\;\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1}$$

et ceci permet de calculer l'intégrale proposée.

Dans le cas où m est négatif la formule (1) ramènerait l'intégrale proposée à une plus compliquée, il faut dans ce cas renverser la formule (1) qui ramène une intégrale $\int x^{-m} dx\,(a+bx^n)^p$ à l'intégrale $\int x^{-m+n} dx\,(a+bx^n)^p$.

30ème Leçon

Formule de Fourier

La formule de Fourier donne le développement d'une fonction en série trigonométrique.

Proposons-nous de développer $\varphi(x)$ par la formule :

$$\varphi(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \cdots\cdots + A_n \sin nx \cdots$$

comme $\varphi(x)$ n'est pas en général une fonction periodique telle que $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ le développement ne serait valable que de $-\pi$ à $+\pi$; et comme $\varphi(x)$ n'est pas non plus fonction impaire le développement ne pourra être valable que de 0 à π. C'est dans ce cas que nous allons calculer les coëfficients.

Pour avoir A_n multiplions par $\sin nx\,dx$ et intégrons de 0 à π ; il vient : $\int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\,dx$ pour le premier membre.

Pour le second nous avons $\Sigma A_l \int_0^\pi \sin lx \sin nx\,dx$. qui donne des termes nuls sauf pour $l = n$. En effet

$$\int_0^\pi \sin lx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos(l-n)x - \cos(l+n)x\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(l-n)x}{l-n} - \frac{\sin(l+n)x}{l+n}\right)_0^\pi = 0$$

Il ne reste que le terme

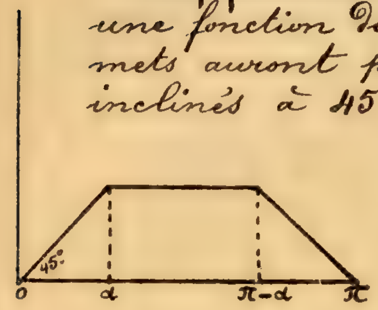
$$A_n \int_0^\pi \sin^2 nx\,dx = A_n \int_0^\pi \frac{(1-\cos 2nx)\,dx}{2} = A_n\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n}\right)_0^\pi = A_n \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } A_n \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\,dx.$$

$$\text{Donc } \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \Sigma \sin nx \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\,dx$$

Si $\varphi(x)$ est developpable en série trigonométrique nous avons obtenu ainsi les coëfficients du développement, il nous faudra prouver qu'il est exact.

Application. Nous allons d'abord l'appliquer à représenter une fonction discontinue. Prenons un trapèze isocèle dont les sommets auront pour abcisses $0, \alpha, \pi-\alpha, \pi$; les côtés obliques étant inclinés à $45°$ sur la base.



De 0 à α la fonction representant l'ordonnée est $y=x$. de α à $\pi-\alpha$ c'est $y=\alpha$ de $\pi-\alpha$ à π c'est $y=\pi-x$.

A_n est donné à l'aide d'une intégrale, mais comme la fonction est discontinue nous n'intégrons que dans les intervalles de continuité.

$$\frac{\pi}{2} A_n = \int_0^\alpha x \sin nx\,dx + \int_\alpha^{\pi-\alpha} \alpha \sin nx\,dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (\pi-x)\sin nx\,dx.$$

$$\int_0^\alpha x \sin nx\,dx = \left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^\alpha + \frac{1}{n}\int_0^\alpha \cos nx\,dx = \left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\alpha = \frac{-\alpha\cos n\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}\sin n\alpha$$

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} \alpha \sin nx\,dx = -\left[\frac{\alpha\cos nx}{n}\right]_\alpha^{\pi-\alpha} = \frac{\alpha\cos n\alpha}{n} - \frac{\alpha\cos n(\pi-\alpha)}{n}$$

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi} (\pi-x)\sin nx\,dx = -\left[\frac{(\pi-x)\cos nx}{n}\right]_{\pi-\alpha}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\cos nx = -\left[\frac{(\pi-x)\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi-\alpha}^{\pi} = \frac{\alpha\cos n(\pi-\alpha)}{n} + \frac{\sin n(\pi-\alpha)}{n^2}$$

D'où $\frac{\pi}{2} A_n = \frac{1}{n^2}\sin n\alpha + \frac{1}{n^2}\sin n(\pi-\alpha)$

Si n est impair on a $\frac{2}{n^2}\sin n\alpha$, Si n est pair on a 0.

Donc $\frac{\pi}{2}\varphi(x) = 2\left[\sin\alpha\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}\sin n\alpha\sin nx\right]$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on a un triangle isocèle et la fonction est représentée par:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \cdots\cdots\cdots\right)$$

Et pour $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

On a donc $\frac{\pi^2}{4} = 2\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\cdots\cdots\right.$

Nous avons obtenu la série représentant $\varphi(x)$ dans les limites $0, \pi$ et suivant les sinus des multiples de x, nous obtiendrons de même la série qui procède suivant les cosinus qui est:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x) = B_0 + B_1\cos x + B_2\cos 2x + \cdots\cdots\cdots$$

B_n étant $= \int_0^\pi \varphi(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha.$

Ces deux séries ne peuvent représenter une fonction quelconque de x qu'entre les limites 0 et π. Mais combinées elles peuvent être étendues à la représentation d'une fonction quelconque entre $-\pi$ et $+\pi$:

En effet, la première série convient dans ces dernières limites à une fonction impaire c'est-à-dire telle que :

$$\varphi(x) = -\varphi(-x)$$

la deuxième convient dans les mêmes limites à une fonction paire telle que: $\varphi(x) = \varphi(-x)$

Or une fonction $F(x)$ quelconque peut être décomposée en une somme de deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ l'une paire et l'autre impaire, en effet ces deux fonctions sont toujours déterminées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} F(x) = \varphi(x) + \psi(x) \\ F(-x) = \varphi(-x) - \psi(-x) \end{cases}$$

la première série donnera le développement de $\psi(x)$ de $-\pi$ à $+\pi$
la seconde série donnera le développement de $\varphi(x)$ de $-\pi$ à $+\pi$

En ajoutant les deux développements on aura celui de $F(x)$ dans les mêmes limites.

Mais dans le coëfficient général du premier développement

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

On pourra au lieu de $\psi(\alpha)$ mettre $F(\alpha)$ puisque cela revient à ajouter

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$$

qui est nulle : car $\varphi(\alpha) \sin n\alpha$ est une fonction impaire dont les différentielles correspondant à des valeurs de la variable égales et de signes contraires se détruisent deux à deux.

De même dans le second développement on écrira F au lieu de φ dans tous les coëfficients. On aura alors les deux séries.

$$\pi\,\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha.$$

$$\pi\,\psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sin nx \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

En ajoutant et faisant entrer $\cos nx$, $\sin nx$ dans les intégrales comme constantes

$$\pi\, F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\alpha \cos n(\alpha - x)$$

qui peut encore s'écrire : $\pi F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos n(\alpha - x)$

Or on sait que $\sum_0^n \cos n(\alpha - x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}}$

Donc pour justifier le développement dont nous avons calculé les termes, nous n'avons qu'à prouver que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\, d\alpha \; \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}}$$

a pour limite $\pi F(x)$ quand n augmente indéfiniment.

Pour cela posons $(n + \frac{1}{2})(\alpha - x) = z$ et substituons la variable z à la variable α dans l'intégrale : on a :

$$\begin{cases} \alpha = x + \dfrac{2z}{2n+1} \\ d\alpha = \dfrac{2\,dz}{2n+1} \end{cases}$$

La quantité placée sous le signe $\int$ devient alors par ce changement de variable

$$\frac{2\,dz}{2n+1} \quad \frac{\sin z}{2 \sin \frac{z}{2n+1}} \; F\left(x + \frac{2z}{2n+1}\right)$$

la limite de cette quantité pour $n = \infty$ si on considère z comme fini est

$$\frac{\sin z\, dz}{z}\, F(x)$$

et la limite de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \dfrac{\sin z\, dz}{z}$

et comme on verra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin z\, dz}{z} = \pi$ le théorème se trouve démontré.

Seulement nous avons considéré z comme une variable qui reste finie et nous avons eu à intégrer de $-\infty$ à $+\infty$ donc à donner à z des valeurs infinies. Le raisonnement qui nous faisait considérer $\dfrac{2z}{2n+1}$ comme infiniment petit est donc en défaut pour ces valeurs de z. Pourtant le théorème reste exact car il se trouve que les éléments de l'intégrale dans lesquels nous n'avions pas le droit de négliger $\dfrac{2z}{2n+1}$ se détruisent et ont une somme nulle. (Ce fait a été démontré rigoureusement

par Dirichlet en décomposant ces termes exceptionnels en parties positives et négatives, qu'il considérait comme éléments de séries alternées.

Remarque. Nous avons dit en passant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z\, dz}{z} = \pi$ ou ce qui revient au même que $\int_0^{\infty} \frac{\sin z\, dz}{z} = \frac{\pi}{2}$

De cette égalité qui sera démontrée dans la prochaine leçon nous pouvons déduire quelques singularités :

faisons $z = ax$ en supposant $a>0$

nous avons $$\int_0^{\infty} \frac{\sin a x . a . dx}{a x} = \int_0^{\infty} \frac{\sin a x . dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

On a une intégrale qui, quand a est >0 est toujours $= \frac{\pi}{2}$

qui, quand a est <0 - - - - - - - - $= -\frac{\pi}{2}$

qui, quand a est $= 0$ est aussi nulle.

Considérons maintenant $\int_0^{\infty} \frac{\sin a x \cos b x}{x}\, dx$ où a et b sont des constantes positives :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin a x \cos b x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin (a+b) x}{2x}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin (a-b) x}{2x}\, dx$$

et nous voyons que si $a > b \qquad J = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$a = b \qquad J = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$a < b \qquad J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

2ème Remarque Les séries de Fourier valables entre $-\pi$ et $+\pi$, cessent de l'être aux limites mêmes.

31ème Leçon

31ème Leçon

Soit une fonction de deux variables $\varphi(x,y)$ considérons y comme un paramètre et x comme la variable.

L'intégrale $\int_a^b \varphi(x,y)\,dx$ prise dans ces conditions est une quantité dépendant des deux limites a, b et de y.

C'est donc une fonction de y et nous pouvons l'intégrer par rapport à cette variable entre deux limites c et d nous aurons:

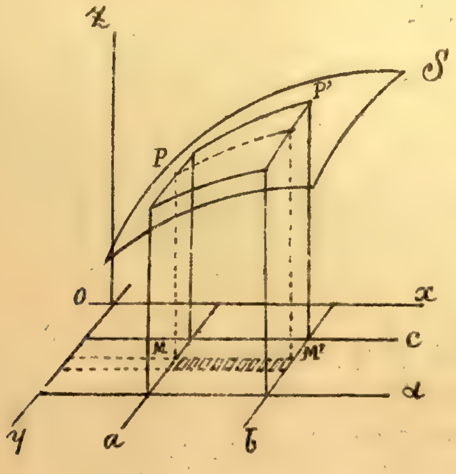
$$\int_c^d dy \int_a^b \varphi(x,y)\,dx \qquad (1)$$

et le résultat ne dépendra que des quatre limites $a, b, c, d.$, du champ dans lequel nous aurons considéré la fonction $\varphi(x,y)$.

On peut renverser l'ordre des intégrations et nous aurions trouvé le même résultat en faisant les opérations dans l'ordre indiqué par l'écriture.

$$\int_a^b dx \int_c^d \varphi(x,y)\,dy \qquad (2)$$

En effet: considérons trois axes de coordonnées rectangulaires et la surface S représentée par l'équation $z = \varphi(x,y)$. Les plans $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ forment un prisme, la partie de ce prisme comprise entre le plan Oxy et la surface S est représentée par l'une comme par l'autre des intégrales (1) et (2).



Pour le démontrer considérons la tranche du volume découpée par deux plans parallèles à Oxz et infiniment voisins:

$$\begin{cases} Y = y \\ Y = y + dy. \end{cases}$$

Cette tranche a pour volume

$$dy \int_a^b \varphi(x,y)\,dx$$

en l'assimilant à un prisme infiniment plat de hauteur dy et ayant pour base la surface $MM'PP'$

Le volume total étant la somme de tranches semblables aura donc pour expression l'intégrale (1)

$$\int_c^d dy \int_a^b \varphi(x,y)\,dx$$

En décomposant ce même volume par des plans parallèles à Oxy on verrait qu'il est aussi exprimé par l'intégrale (2)

Ces deux intégrales définies ont donc bien la même valeur.

Conséquences. Nous allons utiliser ce théorème pour calculer diverses intégrales définies.

1° Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$ ..-

Partons de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ où a et b sont deux constantes; l'intégration par parties donne :

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a}\sin bx + \frac{b}{a}\int e^{-ax}\cos bx\,dx$$

et $$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a}\cos bx - \frac{b}{a}\int e^{-ax}\sin bx\,dx$$

Nous avons donc en combinant ces deux relations :

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{a e^{-ax}}{a^2+b^2}\left(\sin bx + \frac{b}{a}\cos bx\right)$$

D'où $$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Cette intégrale est une fonction de a et je puis l'intégrer entre deux limites α et β j'ai :

$$\int_\alpha^\beta \frac{b\,da}{a^2+b^2} = \int_\alpha^\beta \frac{d\,\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{b} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{b}$$

J'ai ainsi calculé l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta da \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$$

je sais que j'aurai le même résultat en renversant l'ordre des opérations et calculant

$$\int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-ax}\sin bx\,da$$

c'est-à-dire en effectuant la première intégration :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin bx\,dx$$

Cette dernière intégrale est donc égale à

$$\text{arc tg}\,\frac{\beta}{b} - \text{arc tg}\,\frac{\alpha}{b}$$

si nous faisons $\alpha = 0$ et $\beta = \infty$, nous voyons qu'en égalant ce qui reste de chaque côté, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi se trouve démontrée la propriété dont nous nous sommes servis dans la justification de la série de Fourier.

II° Calcul de quelques intégrales définies particulières.—

Nous avons vu que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos gx}{x}\,dx$$

est une fonction de g et de b qui est :

$$\begin{cases} = \frac{\pi}{2} \text{ si } b > g \\ = \frac{\pi}{4} \text{ si } b = g \\ = 0 \text{ si } b < g \end{cases}$$

Considérons cette intégrale comme une fonction u de g et intégrons-là entre les limites 0 et K

$$\int_0^K u\,dg = \int_0^K dg \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos gx}{x}\,dx$$

Si $K < b$ la fonction u a toujours la même valeur $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs de la variable de 0 à K, l'intégrale est donc $\frac{\pi}{2}.K$

Si $K > b$ pour toutes les valeurs de la variable g comprises entre 0 et b on a $u = \frac{\pi}{2}$ et pour toutes les valeurs de g supérieures à b la fonction u est nulle et tout se passe comme si l'on intégrait que de 0 à b.

Donc si $K > b$ l'intégrale est égale à $\frac{\pi}{2}\,b$.

Calculons la même expression en changeant l'ordre des opérations

$$\int_0^K dg \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos gx}{x}\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^K \frac{\sin bx \cos gx}{x}\,dg$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin bx \sin Kx}{x^2}\,dx$$

et nous voyons que cette dernière intégrale, fonction symétrique de K et de b, a pour valeur

$$\frac{\pi}{2} K \quad si \quad K < b$$

$$\frac{\pi}{2} b \quad si \quad K > b$$

Si au lieu de regarder u comme une fonction de g nous la regardons comme une fonction de b pour toutes les valeurs de b comprises entre g et $+\infty$ elle est égale à $\frac{\pi}{2}$, et pour toutes les valeurs de b comprises entre 0 et g elle est nulle, donc :

$$\int_0^\infty e^{-b} u\, db = \int_g^\infty e^{-b} u.\, db = \frac{\pi}{2} e^{-g}$$

Nous avons ainsi la valeur de :

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{e^{-b} \sin bx \cos gx}{x} dx$$

Calculons cette valeur en changeant l'ordre des opérations, nous aurons à calculer :

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{e^{-b} \sin bx \cos gx}{x} db = \int_0^\infty \frac{1}{x} \cos gx\, dx \int_0^\infty e^{-b} \sin bx\, db$$

Or d'après un calcul précédemment fait nous avons vu que

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{donc} \int_0^\infty e^{-b} \sin xb\, db = \frac{x}{1+x^2}$$

nous voyons donc que

$$\int_0^\infty \frac{\cos gx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-g}$$

— Cherchons la valeur de $\int_0^1 \frac{L(1+x)}{1+x^2} dx$

pour cela posons $x = tg\,\varphi$. aux limites 0 et 1 pour la variable x correspondent les limites 0 et $\frac{\pi}{4}$ pour la variable φ, on a donc à calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} L(1+tg\,\varphi)\, d\varphi$$

$$\text{Or :} \quad 1 + tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos\varphi}$$

$$\text{donc} \int_0^{\frac{\pi}{4}} L(1+tg\,\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\, L\sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\, L\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\, L\cos\varphi$$

Or les deux dernières intégrales se composent des mêmes éléments infiniment petits sommés en ordre inverse donc elles se détruisent et il reste

$$\int_0^1 \frac{L(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,L\,\sqrt{2}$$

— Soit à calculer $\int_0^\pi L\,(1-2a\cos x+a^2)\,dx$

Si nous posons $x=\pi-y$ au lieu des limites 0 et π nous aurons π et 0 et par changement de signe 0 et π l'intégrale devient

$$\int_0^\pi L\,(1+2a\cos y+a^2)\,dy$$

Or nous pouvons écrire x au lieu de y, le nom de la variable étant indifférent, nous aurons

$$\int_0^\pi L\,(1-2a\cos x+a^2)\,dx = \int_0^\pi L\,(1+2a\cos x+a^2)\,dx$$

Ces deux quantités égales entre elles, sont la moitié de leur somme

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi L\,(1+a^4+2a^2-4a^2\cos^2 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi L\,(1+a^4-2a^2\cos 2x)\,dx$$

Posons $2x=z$; $\quad = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+a^4-2a^2\cos z)\,dz$

De π à 2π $\cos z$ prend les mêmes valeurs en sens inverse que de 0 à π donc cette intégrale est le double de ce qu'elle serait si les limites étaient 0 et π donc finalement on a:

$$\int_0^\pi L\,(1-2a\cos x+a^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi L\,(1-2a^2\cos x+a^4)\,dx$$

Donc si nous représentons par $\varphi\,(a)$ l'intégrale cherchée nous voyons que

$$\varphi\,(a) = \frac{1}{2}\,\varphi\,(a^2)$$

Supposons $a<1$ alors $\varphi\,(a)$ est nulle, car on a

$$\varphi\,(a) = \frac{1}{2}\,\varphi\,(a^2) = \frac{1}{4}\,\varphi\,(a^4) = \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{2^n}\,\varphi\,(a^{2n})$$

et les deux facteurs $\frac{1}{2n}$ et a^{2n} tendent vers 0, comme $\varphi(0)=0$, on voit que la constante $\varphi\,(a)$ étant égale à des quantités qui ont pour limite 0 est nulle.

Si $a > 1$ l'intégrale peut s'écrire

$$\int_0^\pi L\left[a^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)\right]dx = 2\pi L a + \int_0^\pi dx\, L\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)$$

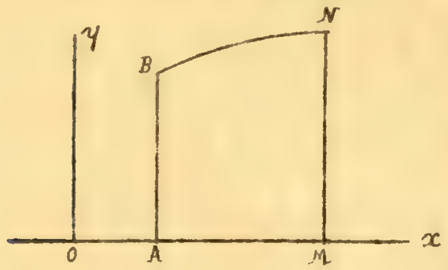
Comme $\frac{1}{a}$ est < 1 la dernière intégrale est nulle et le tout se réduit à $2\pi L a$.

Applications du Calcul Intégral

Aires des Courbes planes

Aire d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires.

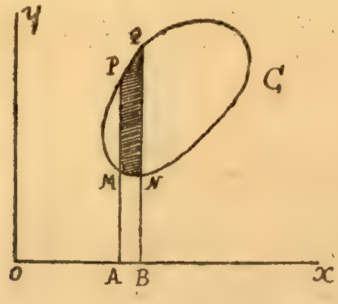
Nous avons vu que l'aire comprise entre une courbe ayant pour équation $y = f(x)$ l'axe des x, et deux ordonnées l'une AB fixe, et l'autre MN avec la longueur $OM = x$, est une fonction de x qui est à une constante près l'intégrale $\int f(x)\,dx$; cette constante doit être telle que pour $x = OA = a$ la fonction soit nulle; la surface considérée est donc représentée par l'intégrale définie



$$\int_a^x f(x)\,dx$$

Ceci permet immédiatement d'évaluer l'aire comprise entre une courbe quelconque une droite quelconque (que l'on pourra prendre pour axe des x) et deux perpendiculaires à celle-ci.

Supposons maintenant que l'on veuille évaluer l'aire comprise à l'intérieur d'une courbe plane fermée telle que C.—



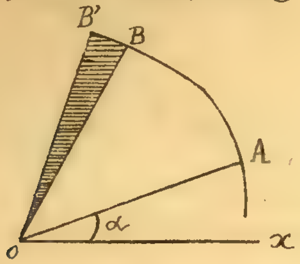
Je considère l'élément de cette aire compris entre deux coordonnées infiniment voisines, c'est un trapèze curviligne infiniment petit $MNPQ$; qui est égal, à un infiniment petit du second ordre près, au rectangle ayant pour dimensions MP et AB. Or, si je désigne l'infiniment petit AB par dx, et les deux valeurs AM et AP de l'ordonnée de la courbe correspondant à l'abscisse OA par y_1 et y_2, ce rectangle a pour mesure $(y_2 - y_1)\,dx$; telle est la différentielle de l'aire considérée; cette aire sera donc égale à l'intégrale

définie $\int_\alpha^\beta (y_2 - y_1)\, dx$; α et β étant les valeurs des abscisses maximum et minimum de la courbe.

Ce qui précède suppose que chaque parallèle à OY ne coupe la courbe qu'en deux points et que celle-ci n'admet que deux tangentes parallèles à OY.

Aire d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

Considérons l'aire OAB comprise entre deux valeurs $OA.OB$ et une courbe quelconque. Soit α l'angle de OA avec l'axe polaire et ω l'angle de OB avec l'axe polaire ; si l'on suppose cet angle variable, l'aire OAB est une fonction de ω, sa différentielle est l'aire OBB' comprise entre le vecteur OB et le vecteur OB' faisant avec Ox un angle $\omega + d\omega$; or celle-ci est égale, à un

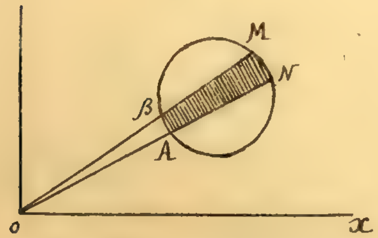


infiniment petit du deuxième ordre près, à l'aire du secteur d'un cercle de rayon OB compris entre ces deux vecteurs c'est-à-dire a $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$.

Celle est donc la différentielle de l'aire considérée. L'aire a alors pour expression $\int \frac{1}{2}\rho^2 d\omega$, elle doit s'annuler pour $\omega = \alpha$; elle est donc égale à

$$\int_\alpha^\omega \frac{1}{2}\rho^2 d\omega$$

Si l'on se propose maintenant de calculer l'aire comprise

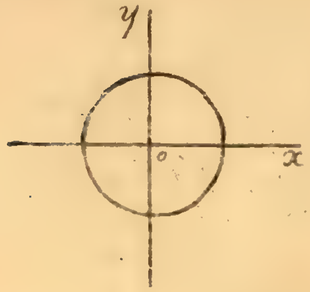


à l'intérieur d'une courbe fermée telle que C, on prendra la portion élémentaire $ABMN$ comprise entre deux vecteurs infiniment voisins faisant entre eux l'angle $d\omega$, si l'on désigne par ρ_1 et ρ_2 les longueurs des vecteurs OA et ON, cet élément est à un infiniment petit du deuxième ordre près égal à $\frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)\, d\omega$, et la surface totale sera égale à

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2)\, d\omega$$

ceci suppose que chaque vecteur ne coupe la courbe qu'en deux points et que du pôle on ne puisse mener que deux tangentes à la courbe faisant avec l'axe polaire des angles que nous avons désignés par ω_1 et ω_2

Exemples : Aire du cercle. — Soit à calculer l'aire d'un cercle, je le rapporte à deux axes rectangulaires passant par son



centre; l'aire du demi-cercle situé au-dessus de Ox, est égale à

$$\int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Pour la calculer j'intègre par parties en posant

$$\sqrt{R^2 - x^2} = u \quad \text{et} \quad dx = dv$$

il vient ainsi

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{R^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad (1)$$

$$\text{mais} \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - R^2)\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \int \frac{R^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Portant dans (1) il vient

$$2\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{R^2 - x^2} + \int \frac{R^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Revenant à l'intégrale définie prise entre les limites $-R$ et $+R$ on a

$$2\int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_{-R}^{+R} \frac{R^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

mais l'intégrale indéfinie $\int \frac{R^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ est égale à $R^2 \arcsin \frac{x}{R}$

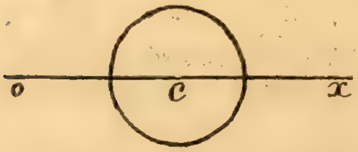
on a donc $\int_{-R}^{+R} \frac{R^2\, dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R^2\left(\text{arc}\,(\sin 1) - \text{arc}\,(\sin -1)\right) = \pi R^2$

C'est là l'expression $2\int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$ qui représente précisément l'aire du cercle entier.

Supposons maintenant le cercle rapporté à des coordonnées polaires, l'axe polaire passant par son centre; son équation est

$$\rho^2 - 2a\rho \cos\omega + a^2 - R^2 = 0 \qquad (1)$$

a désignant la distance du centre du cercle au pôle et R le rayon du cercle.



On a vu que l'aire est représentée par l'intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\rho_1^2 - \rho_2^2)\, \frac{d\omega}{2}$$

ρ_1 et ρ_2 étant les deux racines de l'equation (1), α_1 et α_2 les angles.

des tangentes au cercle issues du point O avec Ox, c'est-à-dire les valeurs de ω pour lesquelles l'équation (1) a une racine double.

Or $(\rho_1^2-\rho_2^2)=(\rho_1-\rho_2)(\rho_1+\rho_2)=4a\cos\omega\sqrt{R^2-a^2\sin^2\omega}$
et les deux angles α_1 et α_2 sont définis par l'équation

$$\sin^2\omega=\frac{R^2}{a^2}$$

L'intégrale à calculer s'écrit donc

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2a\cos\omega\sqrt{R^2-a^2\sin^2\omega}\;d\omega$$

Si l'on pose $a\sin\omega=z$, elle prend la forme

$$\int_{z_1}^{z_2} 2\sqrt{R^2-z^2}\;dz$$

D'ailleurs les valeurs z_1 et z_2 correspondant aux angles α_1 et α_2 sont $-R$ et $+R$, on est donc ramené à la même intégrale définie que précédemment.

Aire d'une ellipse.— Soit l'ellipse

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

tirons y de cette équation

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-\alpha)(\beta-x)}$$

$x=\alpha$, $x=\beta$ sont les tangentes à l'ellipse parallèles à Oy.

Pour chaque valeur d'x nous avons deux valeurs de y, y_1 y_2 et la surface est

$$\int_\alpha^\beta (y_1-y_2)\;dx$$

c'est-à-dire: $\frac{1}{A}\int_\alpha^\beta\sqrt{B^2-4AC}\;dx\;\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$

posons $x-\alpha=(\beta-\alpha)\sin^2\varphi$ d'où $\beta-x=(\beta-\alpha)\cos^2\varphi$
et nous avons à prendre l'intégrale

$$\frac{1}{A}\sqrt{B^2-4AC}\;(\beta-\alpha)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$

et nous sommes ramenés à une question connue.

Dernier exemple.— Soit à chercher l'aire de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{2m+1}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{2n+1}}=1$$

(m et n sont entiers.). la valeur de y est

$$\frac{y}{b} = \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

C'est une expression intégrable, et rentrant dans la catégorie des différentielles binômes (dans le cas où on a $\frac{m+1}{n}+p$ entier).
Mais nous l'intégrerons par une méthode particulière

posons
$$\begin{cases} x = a \sin^{2m+1}\varphi \\ y = b \cos^{2n+1}\varphi \end{cases}$$

nous pouvons représenter ainsi tous les points de la courbe :

$$y\,dx = (2m+1)\,ab\cos^{2n+2}\varphi\sin^{2m}\varphi\,d\varphi$$

il faut intégrer cette différentielle de $x=0$ à $x=a$ c'est-à-dire de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$

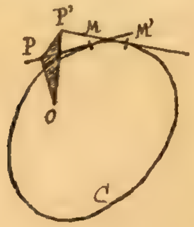
$$(2m+1)\,ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}\varphi\sin^{2m}\varphi\,d\varphi$$

Nous arrivons ainsi à une intégrale que nous savons obtenir par intégrations par parties et réductions successives.

Théorèmes sur les Aires des Courbes Planes

On peut démontrer des théorèmes généraux sur les aires des courbes planes alors même que les intégrations qui donnent ces aires sont impossibles.

Théorème de Steiner. — Considérons une courbe fermée et un point O ; on appelle podaire de cette courbe par rapport au pôle O, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes à la courbe.



Les podaires d'une même courbe C qui ont toutes une même surface S correspondent à des pôles qui sont sur un même cercle.

Quelle que soit la surface commune S assignée aux podaires, ce cercle a toujours le même centre.

En effet supposons la courbe rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires l'équation générale d'une tangente MP à cette courbe est:

$$y - mx - n = 0$$

m étant la tangente de l'angle ω fait par la tangente avec l'axe des x (angle variant de 0 à 2π) et n une fonction de m

dépendant de la courbe.

Soit O un pôle quelconque de coordonnées α, β, P et P' deux points infiniment voisins de la podaire correspondante, correspondant aux points M et M' de la courbe. Si nous appelons p la distance OP, $d\omega$ étant l'angle des deux tangentes MP et M'P', la surface élémentaire de la podaire, celle du triangle OPP' sera
$$\frac{p^2 d\omega}{2}$$

Or $p = \dfrac{\beta - m\alpha - n}{\sqrt{1+m^2}}$, donc la surface de la podaire est, en prenant ω comme variable et remarquant que $m = tg\,\omega$:
$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\beta^2\cos^2\omega + \alpha^2\sin^2\omega - 2\alpha\beta\cos\omega\sin\omega)\,d\omega \\ & + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} n^2\,d\omega\cos^2\omega \\ & - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\beta n\cos^2\omega + 2\,\alpha n\sin\omega\cos\omega)\,d\omega \end{aligned}$$
la première intégrale ne contenant pas n est indépendante de la nature de la courbe, et se réduit après calcul fait à
$$\frac{\pi}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$$
la seconde ne contient ni α ni β, et par suite de la présence de n se réduit à un coëfficient K dépendant de la nature de la courbe; la troisième se réduit à $-\alpha h - \beta g$, h et g dépendant de n et par suite de la courbe. Donc finalement on a
$$S = \frac{\pi}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right) - \alpha h - \beta g + K$$
qui montre que quand S a une valeur donnée les pôles des podaires sont sur un cercle et que le centre du cercle ne dépend que de la nature de la courbe et non de la surface S assignée aux podaires.

32e Leçon

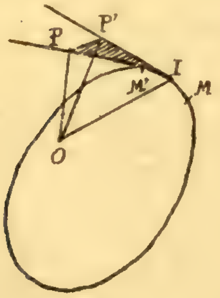
32ème Leçon

Remarque sur le théorème précédent : Si on prenait pour origine le centre commun des cercles, l'équation en deviendrait :

$$\frac{\pi}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)+K = S$$

et on voit que la surface d'une podaire est égale à la surface minima que l'on puisse obtenir : K augmentée de la moitié de la surface du cercle qui a l'origine pour centre et qui passe au pôle de la podaire considérée.

Mais on peut arriver à une autre expression de la surface de la podaire. Cette surface est en effet égale à celle A de la courbe donnée plus la somme des aires des triangles infiniment petits tels que IPP'.



On a donc en désignant par t la longueur IP :

$$S = A + \frac{1}{2}\int t^2 d\omega$$

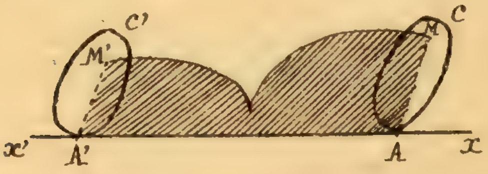
Mais on avait déjà : $S = \frac{1}{2}\int p^2 d\omega$,

p désignant le segment OP.

donc $$2\, S = A + \frac{1}{2}\int \left(t^2+p^2\right) d\omega = A + \frac{1}{2}\int r^2 d\omega$$

r étant le rayon vecteur qui va de O au point M.

Surface d'une Roulette. — On appelle roulette la courbe décrite par un point invariablement lié à un courbe qui roule sans glisser sur une droite. Considérons la courbe dans une de ses positions C et le vecteur AM

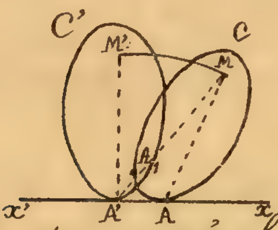


qui va du point de contact de la courbe et de la base au point qui décrit la roulette. Quand le point A considéré comme point de la courbe C reviendra pour la première fois au contact en A' le vecteur AM prendra la nouvelle position A'M' parallèle à la première.

Nous appellerons surface de la roulette la surface comprise

entre AM, A'M' la roulette et la base. Cherchons à évaluer cette surface.

Pour cela considérons la courbe C dans deux positions infiniment voisines C et C' les points de contact A et A' avec la base, et M et M' les deux positions du point qui décrit la roulette, la surface élémentaire est AA'MM' ou MAA' + A'MM'. — Or si j'appelle A_1 le point de C qui doit venir en A' nous pouvons remplacer MAA' par MAA_1 et la somme de triangles tels que MAA_1 dans une révolution complète de la courbe C est la surface même A de cette courbe le triangle A'MM' assimilé à un secteur de cercle de centre A' est égal à $\frac{\overline{A'M'}^2}{2} \times \widehat{MA'M'}$. Or cet angle MA'M' que nous pouvons confondre avec l'angle de A_1M avec A'M' est égal à l'angle dont a basculé le vecteur A_1M pour venir en A'M' c'est-à-dire à l'angle de la tangente en A à la courbe C avec la tangente en A_1 où l'angle $d\omega$ de deux tangentes infiniment voisines de la courbe C. D'ailleurs A'M' peut être remplacé par A_1M c'est-à-dire par r en appelant ainsi le rayon vecteur qui va du point M du plan de la courbe à un point de cette courbe.



On voit que la somme des triangles tels que A'MM' a pour valeur

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\omega$$

Donc en somme la surface de la roulette est

$$\varphi = A + \frac{1}{2}\int r^2 d\omega$$

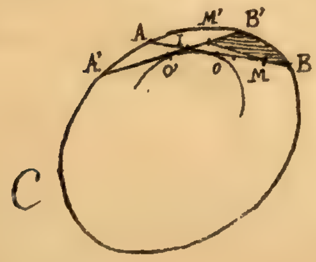
Or nous savons par la remarque précédente que

$$\frac{1}{2}\int r^2\,d\omega = 2\,S - A$$

en appelant S la surface de la podaire de la courbe C par rapport au point M. donc finalement on a $\varphi = 2S$.

<u>La surface d'une roulette est le double de celle de la podaire de la courbe mobile par rapport au point de son plan qui décrit la roulette.</u>

Théorème. Considérons une courbe quelconque fermée C une droite de longueur constante AB dont les extrémités décrivent la courbe. Soit un point M fixe sur cette droite tel que BM = b, AM = a



la surface comprise entre la courbe (M) lieu du point M et la courbe C est indépendante de cette dernière et égale à $\pi a b$.

Pour le démontrer, considérons la courbe enveloppe de AB ; deux positions infiniment voisines AB', A'B' du segment tangentes en O et O' à cette courbe et se coupant en I.

Evaluons d'abord la surface P comprise entre la courbe C et l'enveloppe de AB. Cette surface est la somme de triangles tels que IBB' ou IAA' désignant IB par ρ, et l'angle BIB' par $d\omega$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a+b-\rho)^2 d\omega$$

on voit donc qu'on a

$$0 = \int_0^{2\pi} (a+b)\, d\omega - 2\int_0^{2\pi} \rho\, d\omega.$$

ou

$$\int_0^{2\pi} \rho\, d\omega = \pi\,(a+b)$$

Passons à la surface comprise entre (M) et C, elle a pour élément

$$MM'BB' = \frac{1}{2}\, d\omega \left(\rho^2 - (\rho-b)^2\right) = b\rho\, d\omega - \frac{1}{2} b^2 d\omega$$

la surface entière est donc

$$b\int_0^{2\pi} \rho\, d\omega - \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi} d\omega = \pi(a+b)\,b - \pi b^2 = \pi a b.$$

Longueur d'un arc de courbe. —

Nous savons exprimer la différentielle de l'arc de courbe en fonction de la variable indépendante. Nous n'avons qu'à intégrer cette différentielle entre les limites qui correspondent aux extrémités de l'arc pour avoir la valeur de cet arc.

Le problème de la rectification d'une courbe est donc un simple problème d'intégration.

Application. — Cycloïde. On a vu que les coordonnées d'un point M de la courbe sont données par les formules

$$x = a\,(u - \sin u)$$

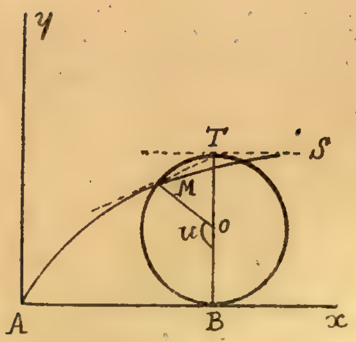
$$y = a\,(1 - \cos u)$$

a étant le rayon d'un cercle générateur, et u l'angle que fait la droite OM qui joint le centre du cercle générateur au point M avec le rayon du point de contact B.

De ces formules on déduit

$$dx = a\,du\,(1-\cos u)$$
$$dy = a\sin u\,du$$

et $ds = a\,du\sqrt{(1-\cos u)^2+\sin^2 u} = 2a\,du\sin\frac{u}{2}$



On en déduit immédiatement en intégrant

$$s = -4a\cos\frac{u}{2} + C$$

Si je compte l'arc à partir du sommet S de la courbe qui correspond à la valeur $u=\pi$, la constante est nulle, mais comme u et s varient en sens inverse il aurait fallu écrire $ds = -2a\,du\sin\frac{u}{2}$

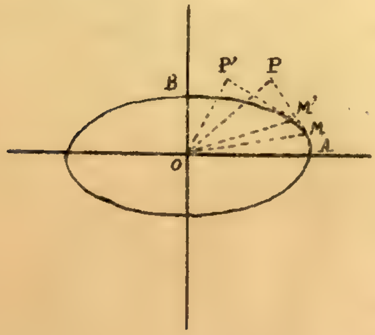
et l'on a par suite $s = 4a\cos\frac{u}{2}$

Mais si je joins le point M au point T diamètralement opposé de B, qui est d'ailleurs situé sur la tangente en S à la courbe on obtient comme on sait la tangente en M à la courbe, et le segment TM est égal à $2a\cos\frac{u}{2}$

On a donc $SM = 2\,TM$.

Théorème de Fagnano.— Étant donné un arc d'ellipse AM compté à partir d'un sommet d'une ellipse on peut toujours trouver un arc BM' compté à partir de l'autre et tel que la différence $BM' - AM$ soit rectifiable.

Considérons la tangente MP en M et soit l la longueur de la projection MP du vecteur OM sur la tangente. Il existe un autre point M' sur l'arc AB tel que la projection de OM' sur la tangente en M' ait aussi pour longueur l. La différence $\overset{\frown}{BM'} - \overset{\frown}{AM}$ est rectifiable.



En effet cherchons les points M et M'

$$l^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2 = r^2 - p^2$$

Or $r^2 = x^2 + y^2$

et l'équation de l'ellipse étant $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$

$$p^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4y^2 + b^4x^2}$$

Ces équations nous permettent d'exprimer p en fonction de r

$$p^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2}$$

donc l étant donné l'équation en r^2 qui définit les deux points M et M' est

$$l^2 = r^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2}$$

On a deux racines r^2 et r'^2 et la somme de ces deux racines est :

$$r^2 + r'^2 = a^2 + b^2 + l^2$$

Donc

$$r\,dr + r'\,dr' = l\,dl$$

$$r\,\frac{dr}{l} + r'\,\frac{dr'}{l} = dl$$

Or si nous appelons V l'angle de la tangente en M avec OM on a $l = r \cos V$

D'ailleurs on sait que $\operatorname{tg} V = r\,\frac{d\omega}{dr}$

Donc $l = r\,\dfrac{1}{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2}} = r\,\dfrac{dr}{dS}$ (S étant l'arc AM)

on voit ainsi que $\dfrac{r\,dr}{l} = dS$

On aura de même $\dfrac{r'dr'}{l} = -dS'$ (S' étant l'arc BM' compté en sens inverse de AM)

Donc la relation que nous avons obtenue

$$\frac{r\,dr}{l} + \frac{r'dr'}{l} = dl$$

peut s'écrire $\quad dS - dS' = dl$

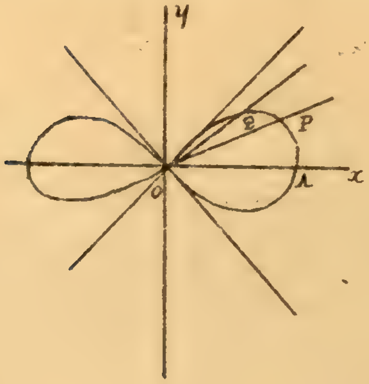
et l'on en conclut $\quad S - S' = l$

la différence AM − BM' est donc bien rectifiable.

Lemniscate.— Considérons la courbe ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega \qquad (1)$$

Elle porte le nom de lemniscate et présente la forme ci-contre.



Si l'on calcule la différentielle de l'arc, on a

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}\;d\omega$$

or dérivant l'équation (1) il vient

$$2\rho\, d\rho = -2a^2 \sin 2\omega\, d\omega$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{-a \sin 2\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

et par suite

$$ds = \sqrt{a^2 \cos 2\omega + \frac{a^2 \sin^2 2\omega}{\cos 2\omega}}\; d\omega = \frac{a\, d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

On ne sait pas intégrer cette différentielle et par suite on ne sait pas calculer l'arc de lemniscate.

Fagnano a démontré le théorème suivant ; si à partir de l'origine on mène deux droites faisant avec l'axe polaire des angles ω_1 et ω_2 liés par la relation $\cos\omega_1 \cos\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, les arcs qu'ils déterminent sur la courbe comptés respectivement à partir des points O et A sont égaux.

En effet pour montrer que ces deux arcs, l'un fonction de ω_1 l'autre de ω_2, sont égaux il suffit de faire voir qu'ils ont même différentielle ; car ils s'annulent en même temps ; en effet si l'on fait $\omega_1 = 0$ l'arc AP est nul, mais en vertu de la relation $\cos\omega_1 \cos\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on a $\omega_2 = 45°$ et par suite OQ est nul, la courbe étant tangente en O à la bissectrice de l'angle des axes.

Or si je désigne les deux arcs AP et OQ par s_1 et s_2

on a
$$ds_1 = \frac{a\, d\omega_1}{\sqrt{\cos 2\omega_1}}$$

$$ds_2 = \frac{a\, d\omega_2}{\sqrt{\cos 2\omega_2}}$$

Mais de la relation qui lie ω_1 et ω_2 on déduit en différentiant

$$-\sin\omega_1\, d\omega_1 \cos\omega_2 - \sin\omega_2\, d\omega_2 \cos\omega_1 = 0 \text{ ou } \frac{d\omega_1}{d\omega_2} = \frac{-tg\,\omega_2}{tg\,\omega_1}$$

On doit vérifier que ces deux valeurs de $\frac{d\omega_1}{d\omega_2}$ sont égales, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{tg^2\omega_2}{tg^2\omega_1} = \frac{\cos 2\omega_1}{\cos 2\omega_2}$$

J'exprime tout en fonction de $\cos\omega_1$ et $\cos\omega_2$, il vient à vérifier

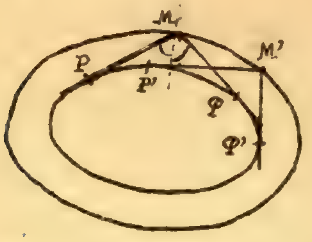
$$\frac{1-\cos^2\omega_2}{\cos^2\omega_2} : \frac{1-\cos^2\omega_1}{\cos^2\omega_1} = \frac{2\cos^2\omega_1 - 1}{2\cos^2\omega_2 - 1}$$

remplaçant le produit $\cos\omega_1 \cos\omega_2$ par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cette relation se

réduit à l'identité
$$\frac{\cos^2\omega_1-\frac{1}{2}}{\cos^2\omega_2-\frac{1}{2}} = \frac{2\cos^2\omega_1-1}{2\cos^2\omega_2-1}$$

Ce qui établit le théorème.

Théorème de Chasles. — Si on prend deux ellipses homofocales et que par deux points M et M' de l'une d'elle on mène les tangentes MP, MΦ ; M'P', M'Φ' à l'autre, la différence des deux arcs PΦ et P'Φ' est rectifiable.



Cela tient à ce que l'on a
$$MP+M\varphi-\widehat{P\varphi} = M'P'+M'\varphi'-\widehat{P'\varphi'}$$

Ce qui est évident : En effet on sait que les deux droites MP et MΦ font toujours des angles égaux avec la normale en M.

D'après le théorème sur l'accroissement de longueur d'un segment mobile nous voyons que l'accroissement de MP dû au déplacement de M détruit celui de MΦ dû au même déplacement.

On voit alors qu'il reste
$$M'P'+M'\varphi'-(MP+M\varphi)=PP'-\varphi\varphi'=P'\varphi'-P\varphi.$$

Ce qui démontre le théorème.

Il en est de même pour une ellipse et une hyperbole homofocales.

33e Leçon

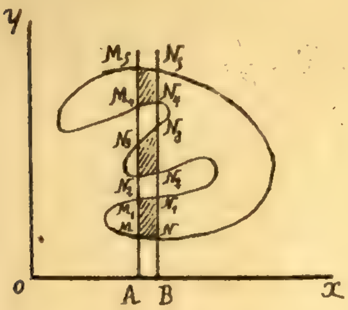
33ème Leçon

Dans l'évaluation de l'aire d'une courbe fermée nous avons donné la formule

$$A = \int_\alpha^\beta (y_0 - y_1)\, dx,$$

en supposant qu'une parallèle à l'axe des x ne coupait la courbe qu'en deux points d'ordonnées y_0 et y_1.

Supposons une courbe fermée de forme plus compliquée, considérons les portions de l'aire comprises entre deux ordonnées infiniment voisines AM et BN, leur somme constitue la portion élémentaire de l'aire calculée; si l'on désigne par $y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ les ordonnées des points de rencontre de AM avec la courbe cette portion est égale à



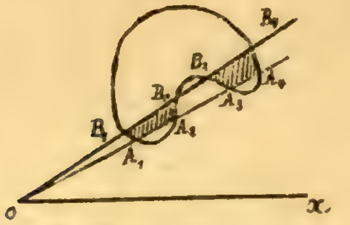
$$\left[(y_5 - y_4) + (y_3 - y_2) + (y_1 - y) \right] dx \qquad (1)$$

L'aire cherchée est alors la somme des éléments infiniment petits tels que ceux-ci; c'est donc une intégrale, mais pour la calculer il faudra discuter avec soin le nombre de points d'intersection de AM avec la courbe, suivant la valeur de l'abscisse OA.

L'expression (1) peut être mise sous une forme plus simple; il suffit de remarquer que le segment $AB = dx$ est la projection de chacun des arcs élémentaires MN, M_1N_1 .... que je désigne par ds, si je désigne par α l'angle d'un de ces éléments MN avec Ox, c'est-à-dire l'angle de la normale en M à la courbe avec Oy; on a $dx = ds \cos\alpha$; en valeur absolue. Chacun des termes de la somme (1) est de la forme $y\, ds \cos\alpha$ et l'on constate aisément que l'on obtiendra ce terme avec son signe en prenant α l'angle fait par la direction positive Oy avec la direction de la normale partant du point extérieurement à la courbe; par suite l'aire totale est $\int y\, ds \cos\alpha$, prise pour tous les arcs infiniment petits de la courbe donnée.

De même, en coordonnées polaires, nous avons trouvé pour

l'aire d'une courbe $A = \int (\rho_1^2 - \rho_2^2)\, d\omega$ en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons vecteurs des points de la courbe qui sont sur chaque rayon issu du pole. Cette formule ne s'applique que quand une droite passant au pôle ne coupe la courbe qu'en deux points. Si la courbe est de forme compliquée, telle que celle qui est figurée ci-contre, la portion élémentaire comprise entre deux vecteurs infiniment voisins est égale à $\frac{1}{2}(\rho_4^2 - \rho_3^2 + \rho_2^2 - \rho_1^2)\, d\omega$ (1) et l'aire totale est la somme de toutes ces portions élémentaires. Une remarque analogue à celle faite précédemment, montre que chacune des parties de la somme (1) est égale en grandeur et en signe $\frac{1}{2} \rho\, ds \cos \alpha$.



α étant l'angle que fait la direction positive du vecteur avec celle dans laquelle on se déplace sur la normale en se dirigeant extérieurement à la courbe, et ds étant l'arc élémentaire de la courbe tel que $A_1 B_1$. La surface totale cherchée est donc égale $\int \frac{1}{2} \rho\, ds \cos \alpha$, prise pour tous les arcs infiniment petits de la courbe.

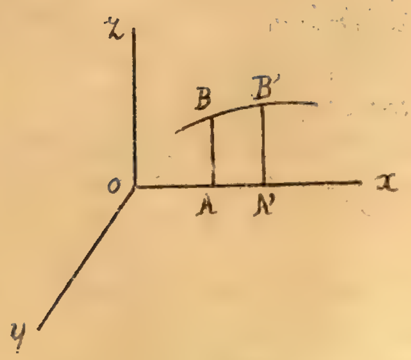
Aire des surfaces courbes

La recherche de l'aire d'une surface courbe exige dans le cas le plus général deux intégrations successives. Pour évaluer l'aire d'une portion finie de surface courbe on la divisera d'abord en portions présentant une dimension infiniment petite et une dimension finie, dans certains cas particuliers on saura évaluer immédiatement l'aire d'une telle portion; dans le cas général on divisera cette portion en éléments ayant leurs deux dimensions infiniment petites et que l'on évaluera comme s'ils étaient plans puis on obtiendra l'aire de la portion infiniment petite considérée précédemment par une première intégration.

Une deuxième intégration permettra de passer de cette aire infiniment petite à l'aire totale cherchée.

Aire d'une surface de révolution.— Le premier cas est celui d'une surface de révolution, par exemple. Soit une surface de révolution autour de l'axe des x, donnée par sa méridienne dans le plan des xz.

Si je considère la portion de l'aire comprise entre les deux



parallèles engendrées par les deux droites infiniment voisines AB, A'B' parallèles à Oz, elle peut être assimilée à la surface latérale du tronc de cône engendré par la corde infiniment petite BB'. Cette surface latérale est comme on sait égale à

$$2\pi\, BB' \left(\frac{AB + A'B'}{2}\right);$$ elle diffère infiniment peu de

$$2\pi\, BB' \times AB.$$

Soit x, z les coordonnées du point B; $x+dx$, $z+dz$ celles du point B' cet élément de surface a pour expression

$$2\pi z \sqrt{dx^2 + dz^2} = 2\pi z\, ds$$

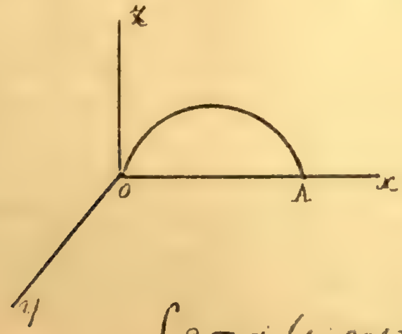
ds étant la différentielle de l'arc de la méridienne.

La surface totale comprise entre deux parallèles d'abcisse x_1 et x_2 sera

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi z \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

Si l'on suppose que la méridienne soit une cycloïde le calcul est très simple, les équations de la méridienne sont

$$x = a\ (u - \sin u)$$
$$z = a\ (1 - \cos u)$$



On en déduit

$$dx = a\ (1 - \cos u)\, du$$
$$dz = a\ \sin u\, du$$

L'expression à calculer est donc

$$\int 2\pi a\, (1-\cos u) \sqrt{a^2 du^2 (1-\cos u)^2 + \sin^2 u} = 8\pi a^2 \int \sin^3 \frac{u}{2}\, du$$

Si je pose $\frac{u}{2} = \varphi$ l'expression devient

$$16\pi a^2 \int \sin^3 \varphi\, d\varphi$$

On prendra cette intégrale entre les limites correspondant aux deux parallèles auxquels on limite la surface de révolution; en particulier si l'on considère la portion engendrée par l'arc de cycloïde compris entre deux intersections successives avec l'axe des x les limites à prendre sont $u = 0$ et $u = 2\pi$ c'est-à-

dire $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$.

La surface considérée est donc

$$S = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi = 32\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi$$

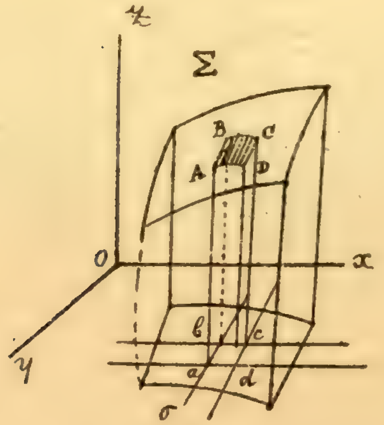
Or cette dernière intégrale est, comme l'on sait, égale à $\frac{2}{3}$

On a donc en définitive $S = \frac{64}{3}\pi a^2$.

Cas général. — Dans le cas général, on emploie la méthode suivante.

Je considère la surface Σ dont on veut évaluer l'aire et sa projection σ sur le plan des xy.

Je mène deux séries de plans infiniment voisins, les uns parallèles au plan des yz, les autres parallèles au plan des xz; ils découpent sur la surface Σ des éléments infiniment petits du 2e ordre tels que ABCD, projetés suivant des rectangles tels que $abcd$; l'aire de ce dernier rectangle est $dx\ dy$; l'aire ABCD diffère infiniment peu de celle de la section du prisme qui la projette par le plan tangent à la surface en A, soit γ l'angle de ce plan avec le plan horizontal; l'aire ABCD peut donc être remplacée par $\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$



L'aire totale Σ s'obtiendra en intégrant cette expression successivement par rapport à x et à y.

L'aire cherchée est donc représentée par l'intégrale double

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

cette intégrale doit être prise pour tous les couples de valeurs de x et de y, répondant à un point intérieur à la surface Σ, ou à sa projection σ. L'angle γ du plan tangent en A à la surface Σ avec plan des xy est égal à celui de la normale en A avec Oz; son cosinus est comme on sait égal à

$$\frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

p et q désignant les dérivées $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ relatives au point

A de la surface Σ.

L'aire cherchée est donc encore représentée par l'intégrale double

$$\iint dx\, dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

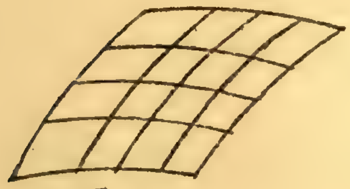
Cette méthode revient à diviser la projection σ en éléments infiniment petits du deuxième ordre dont on évalue l'aire, puis à en déduire l'aire des éléments de la surface proposée qui se projettent suivant les éléments considérés.

La division de la surface σ en éléments peut être effectuée au moyen de courbes absolument quelconques qui correspondent comme on sait à différents systèmes de coordonnées dans le plan des $x\, y$.

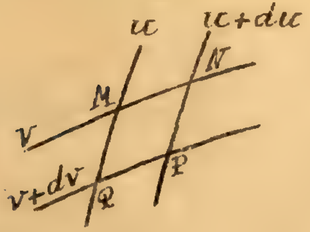
Si l'on prend par exemple les coordonnées polaires l'expression de l'élément de la surface Σ devient $\rho\, d\omega\, d\rho \sqrt{1+p^2+q^2}$, et l'aire cherchée est alors représentée par l'intégrale double

$$\iint \rho\, d\omega\, d\rho \sqrt{1+p^2+q^2}$$

Deuxième méthode. — On divise souvent directement la surface proposée Σ en éléments infiniment petits du deuxième ordre au moyen de deux séries de courbes tracées sur la surface proposée par deux séries de surfaces auxiliaires représentées les premières par l'équation $u =$ constante, les deuxièmes par l'équation $v =$ constante ; u et v étant deux fonctions de x, y, z. Ces fonctions u et v étant données, ainsi que l'équation de la surface Σ, on peut en déduire les expressions de x et de y en fonction de u et de v ; soit



$$x = \varphi_1 (u, v)$$
$$y = \varphi_2 (u, v)$$
$$z = \varphi_3 (u, v)$$



Je considère l'élément $MNPQ$ de surface compris d'une part entre les deux courbes répondant aux valeurs u et $u + du$ de la fonction u, d'autre part entre les deux courbes répondant aux valeurs v et $v + dv$ de la fonction v.

On sait que l'aire de cet élément est

$$d\sigma = du\,dv\,\sqrt{AC - B^2}$$

en posant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = A \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = B \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = C \end{cases}$$

En intégrant deux fois cette expression entre les limites convenables on obtiendra l'expression de l'aire considérée Σ.

Application. — Aire de l'Ellipsoïde. Soit l'ellipsoïde.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Prenons comme coordonnées d'un point de cette surface

$$x = a \sin\theta \cos\psi$$
$$y = b \sin\theta \sin\psi$$
$$z = c \cos\theta$$

En prenant les quantités A, B, C les variables étant θ et ψ on arrivera à la surface élémentaire

$$d\sigma = abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

On voit que sous le radical θ n'entre que par le carré de son cosinus. On pourra donc faire la première intégration par rapport à θ. Mais on ne pourra faire la seconde intégration.

Application à la sphère. — Si la surface comprenant la portion Σ considérée est une sphère on emploiera généralement les coordonnées θ et ψ que nous avons définies

Nous avons vu que l'on a

$$x = R\sin\theta\cos\psi \qquad dx = R(\cos\theta\cos\psi\,d\theta - \sin\theta\sin\psi\,d\psi)$$
$$y = R\sin\theta\sin\psi \qquad dy = R(\cos\theta\sin\psi\,d\theta + \sin\theta\cos\psi\,d\psi)$$
$$z = R\cos\theta \qquad dz = -R\sin\theta\,d\theta$$

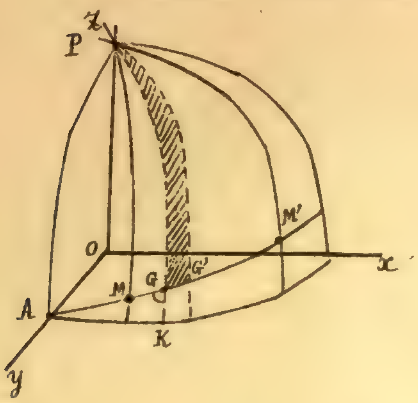
D'où $\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)$

Si l'on se reporte aux notations précédentes on voit que l'on a dans ce cas particulier

$$A = R^2, \quad C = R^2 \sin^2\theta \quad \text{et } B = 0$$

On a donc pour expression de l'élément infiniment petit de l'aire Σ $\quad d\Sigma = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$

Aire d'un triangle sphérique.—



Prenons le centre de la sphère comme origine l'axe Oz passant par un sommet P du triangle et l'axe Oy rencontrant le côté opposé.

Nous avons ainsi le triangle en PMM'

On sait que la surface élémentaire sur la sphère est

$$d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

(le rayon étant pris = 1)

Cherchons d'abord l'aire d'une tranche infiniment petite telle que PGG' pour cela considérons ψ et $d\psi$ comme constants et intégrons:

$$d\psi \int \sin\theta\, d\theta = d\psi(-\cos\theta).$$

en prenant l'intégrale de 0 valeur de θ en P à θ valeur en G on a comme expression de la surface PGG'

$$d\psi\,(1 - \cos\theta)$$

Si ψ_0 et ψ_1 sont les valeurs de ψ en M et M' il faut prendre maintenant

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi\,(1 - \cos\theta) = \hat{P} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \cos\theta$$

Or le long de l'arc MM' on a en appelant A l'angle $\widehat{MAK}$

$$\cot g\,\theta = tg\,A \cos\psi$$

c'est-à-dire $\quad \cos\theta = \dfrac{tg\,A\cos\psi}{\sqrt{1 + tg^2 A \cos^2\psi}}$

Nous avons donc à calculer

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{tg\,A \cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1 + tg^2 A\cos^2\psi}} = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\sin A \cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 A \sin^2\psi}}$$

$$= \Big[\arcsin(\sin A \sin\psi)\Big]_{\psi_0}^{\psi_1}$$

mais dans le triangle sphérique rectangle AGK on a

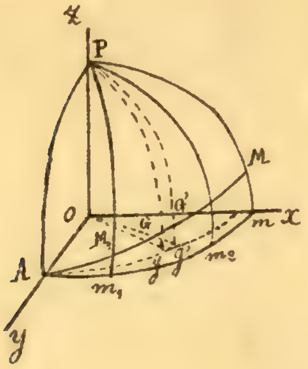
$$\cos \hat{G} = \sin A \sin \psi$$

donc l'intégrale à calculer est égale à $-(\hat{M} + \hat{M}' - \pi)$ et l'aire du triangle est égale à $P + M + M' - \pi$:

C'est là le résultat bien connu.

Nous avons calculé l'aire du triangle sphérique en partant de la surface de l'élément de sphère exprimée directement à l'aide de coordonnées particulières prises sur la sphère.

Nous pouvons résoudre le même problème par l'autre méthode de recherche des aires courbes, en partant de l'aire de la projection du triangle sur le plan des xy.



En prenant comme coordonnées dans le plan des xy les coordonnées polaires r et ψ l'élément de surface est

$$r\,dr\,d\psi$$

la surface de l'élément correspondant de la sphère est égale à cette surface élémentaire multipliée par l'inverse du cosinus de l'angle de la normale à la sphère avec l'axe Oz ; c'est donc

$$r\,dr.\,d\psi.\,\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Alors pour évaluer la surface infiniment petite PGG' nous n'avons qu'à considérer dans cette différentielle ψ et $d\psi$ comme constant et intégrer de $r = 0$ à $r = \rho$, ρ représentant le vecteur Og, cette surface PGG' est donc égale à

$$R\,d\psi \int_0^\rho \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R\,d\psi \left(R - \sqrt{R^2 - \rho^2}\right)$$

Or l'équation de l'ellipse lieu du point g. est

$$\frac{x^2}{R^2 \cos^2 A} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

c'est-à-dire dans les coordonnées polaires adoptées :

$$\rho^2 \left(\frac{\cos^2\psi}{R^2\cos^2 A} + \frac{\sin^2\psi}{R^2}\right) = 1$$

nous en tirons : $R^2 - \rho^2 = \dfrac{R^2 \cos^2\psi \sin^2 A}{1 - \sin^2\psi \sin^2 A}$

Et pour avoir la surface totale du triangle sphérique nous

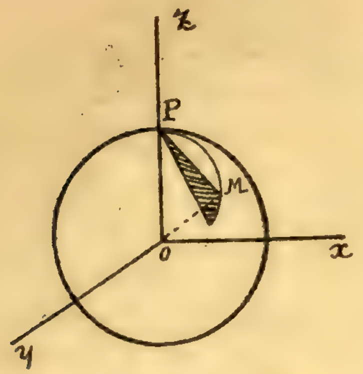
avons à calculer l'intégrale

$$R^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \left(1 - \frac{\cos\psi \sin A}{\sqrt{1-\sin^2\psi \sin^2 A}}\right)$$

Nous sommes aussi ramenés au calcul précédent.

Problème de Viviani. — Ce problème a été proposé par Viviani en défi aux géomètres qui affirmaient que le calcul intégral permettait de résoudre des problèmes, réputés insolubles, par les anciennes méthodes. —

Un grand nombre de solutions lui furent données.



Le problème est le suivant : étant donnée une voûte hémisphérique, y percer deux fenêtres de telle manière que l'aire de la partie restante soit exactement quarrable.

La solution de Leibnitz est la suivante. Je définis un point de la sphère θ et ψ, je choisis d'ailleurs comme pôle un point P de l'une des courbes cherchées ; soit M un point quelconque de la courbe ; je considère l'aire de celle-ci comprise entre le grand cercle PM et un grand cercle infiniment voisin faisant avec le précédent un angle $d\psi$.

L'élément de cette portion de surface (élément compris entre deux parallèles infiniment voisins) a pour expression $R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$.

Si θ est l'angle POM, la portion considérée de la surface a pour expression

$$\int_0^\theta R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi = R^2 d\psi (1-\cos\theta)$$

Alors l'aire totale de la fenêtre sera représentée par l'intégrale

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2\, d\psi (1-\cos\theta) \qquad (1)$$

Pour la calculer il faudrait connaître θ en fonction de ψ c'est-à-dire l'équation de la courbe cherchée, l'expression de θ en fonction de ψ est définie par cette seule condition que la différence entre $2\pi R^2$ (aire de la demi sphère) et le double de l'intégrale (1) (aire des deux fenêtres) soit quarrable, cette expression n'est pas complètement définie.

Leibnitz a remarqué que le problème sera résolu si on prend $\theta = \psi$.

En effet l'intégrale devient

$$\int R^2 \, d\psi \, (1 - \cos\psi) = R^2 \psi - R^2 \sin\psi$$

Si je considère la portion de la courbe définie par l'équation $\theta = \psi$ qui est située sur la demi sphère en avant du plan des xz et à droite du plan des yz, j'obtiendrai son aire en prenant l'intégrale précédente entre les limites $\psi = 0$ $\psi = \frac{\pi}{2}$ il vient ainsi pour l'aire de cette portion

$$\frac{\pi R^2}{2} - R^2$$

Mais on reconnaît aisément que la courbe est symétrique par rapport au plan des xz, elle admet donc en arrière du plan des xz une deuxième portion ayant aussi pour aire $\frac{\pi R^2}{2} - R^2$. On a ainsi constitué une fenêtre ayant pour surface $\pi R^2 - 2R^2$ en en prenant une deuxième symétrique par rapport au plan des yz, on enlèvera à la surface de la demi sphère $(2\pi R^2 - 4R^2)$; la surface restante sera donc $4R^2$, elle est exactement quarrable, le problème de Viviani est donc résolu de la sorte.

Pour mettre l'équation de la courbe ainsi obtenue sous forme plus simple je repasse aux coordonnées rectangulaires.

On sait que l'on a

$$z = R\cos\theta$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\psi$$

Egalant les cosinus des arcs θ et ψ il vient

$$\frac{z}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}$$

ou

$$\frac{z^2}{R^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

La projection sur le plan des xy a pour équation

$$\frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{R^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

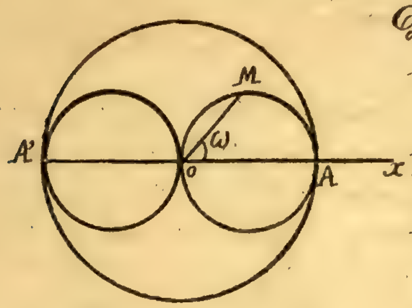
ou $(x^2 + y^2)^2 = R^2 x^2$

Cette projection se décomposera en deux cercles

$$x^2 + y^2 \pm R x = 0$$

Ce sont deux cercles ayant pour diamètres l'un le rayon compté suivant Ox, l'autre le rayon compté suivant le prolongement de Ox au delà du point O, – ils représentent les projections des deux fenêtres. (On peut remarquer que le cercle $x^2+y^2+Rx=0$ n'est pas la projection d'une courbe de l'hémisphère supérieur satisfaisant à l'équation $\theta=\psi$; la courbe de l'hémisphère supérieur projetée suivant ce cercle a pour équation $\theta=\pi-\psi$, elle est symétrique de l'autre par rapport au plan des yz).

Autre méthode. On peut montrer d'une manière plus rapide que les deux fenêtres ainsi définies répondent à la condition posée par Viviani.



En effet calculons l'aire de la portion de surface de la sphère qui est projetée suivant le demi-cercle OMP.

Pour cela je rapporte un point du plan à O pris comme pôle et à Ox pris comme axe polaire ; l'élément de l'aire est $\rho\, d\omega\, d\rho$; et l'élément de l'aire de la sphère projeté suivant cet élément a pour aire

$$\frac{\rho\, d\omega\, d\rho}{\cos\theta}$$

θ étant l'angle de la normale à la sphère avec l'axe des z ; on a évidemment $\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{R}$

Donc l'élément de l'aire de la sphère est

$$\frac{R\rho\, d\omega\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

On obtiendra toute l'aire projetée suivant le demi-cercle OMA en intégrant par rapport à ρ entre les limites 0 et OM c'est-à-dire entre 0 et $R\cos\omega$, puis par rapport à ω entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Il résulte donc de là que l'aire totale des deux fenêtres sera égale à

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

or

$$\int \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = -R\sqrt{R^2-\rho^2}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{R\cos\omega} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = R^2 - R^2 \sin\omega$

La surface cherchée est donc encore égale à

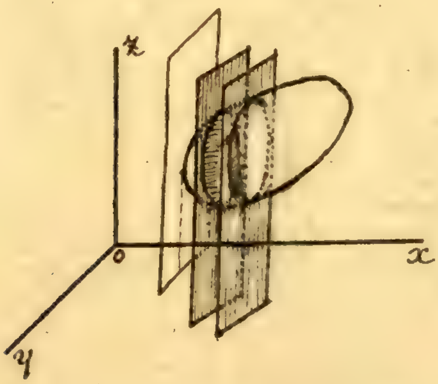
$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2(1-\sin\omega)\, d\omega = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega - 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\, d\omega = 2\pi R^2 - 4R^2$$

La partie restante de la demi sphère est donc $4R^2$.

34ème Leçon

Calcul des Volumes

Soit à évaluer d'un corps solide; je le coupe par une série de plans parallèles au plan des yz, et infiniment voisins. Si je considère l'élément de volume infiniment petit compris entre deux de ces plans, il peut être assimilé à un cylindre ayant pour base la section faite par l'un des plans et pour hauteur la distance $\underline{dx}$ de ces deux plans (la différence entre le volume de ce cylindre et celui de l'élément considéré étant un infiniment petit du 2nd ordre)



Soit $\varphi(x)$ l'aire de la section faite dans la surface par le plan situé à une distance $\underline{x}$ de l'origine; le cylindre considéré a pour volume $\varphi(x)\,dx$; et le volume total du solide est la somme des valeurs de cette expression pour toutes les valeurs de x auxquelles correspondent des plans coupant la surface; si donc x_1 et x_2 sont les abcisses des plans tangents à la surface, parallèles à zoy situés l'un le plus à droite, l'autre le plus à gauche, le volume considéré sera représenté par l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx$$

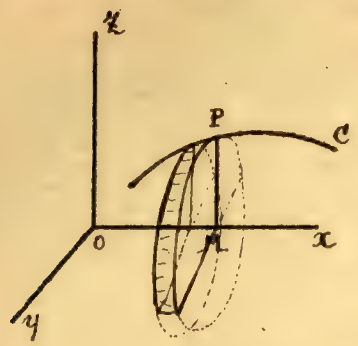
En général la fonction $\varphi(x)$ qui représente une aire sera

obtenue par une première intégration ; le calcul d'un volume se ramène donc à deux intégrations successives.

Il est cependant un certain nombre de cas où la première intégration se fait immédiatement, c'est le cas où l'aire des sections par les plans considérés est connue (triangle, trapèze, cercle etc)

Surfaces de révolution. — C'est par exemple le cas des surfaces de révolution ; si on prend leur axe de révolution pour axe des x, la fonction φ sera immédiatement connue.

Si l'on considère la surface de révolution engendrée par une courbe C en tournant autour de Ox le volume compris entre deux plans parallèles à yOz et d'abcisses a et b sera d'après ce qui précède



$$V = \int_a^b \pi z^2 \, dx$$

mais si la courbe C est définie par l'équation $z = \varphi(x)$ on a encore

$$V = \pi \int_a^b \left[\varphi(x)\right]^2 dx$$

Soit par exemple à calculer le volume engendré par une cycloïde tournant autour de la droite sur laquelle roule le cercle générateur, la courbe étant limitée à deux intersections successives avec cette droite.

La méridienne a pour équations

$$x = a\,(u - \sin u)$$
$$z = a\,(1 - \cos u)$$

Alors $z^2 = a^2\,(1-\cos u)^2 = 4a^2 \sin^4 \frac{u}{2}$

et $dx = a\,(1-\cos u)\,du = 2a \sin^2 \frac{u}{2}\,du$

et les limites entre lesquelles on devra intégrer sont

$$u = 0 \text{ et } u = 2\pi$$

On a donc
$$V = \int_0^{2\pi} 8\pi a^3 \sin^6 \frac{u}{2}\,du$$

Si l'on pose $\frac{u}{2} = \varphi$, il vient

$$V = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6\varphi\,d\varphi = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\,d\varphi$$

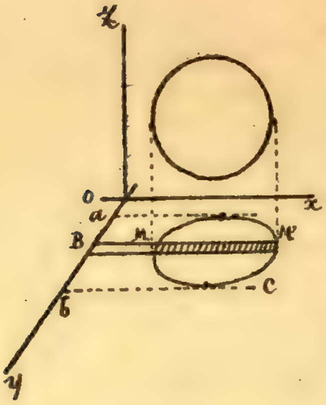
Mais l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\,d\varphi$ est comme on sait égale à $\frac{5\pi}{32}$.

On a donc $V = 5\pi^2 a^3$.

Evaluation d'un volume terminé par une surface quelconque

Soit $F(x, y, z)$ la surface ; la trace sur le plan des xy du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à Oz est le résultat de l'élimination de z entre $F=0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$



Soit C cette courbe.

Considérons une tranche infiniment mince du volume découpée parallèlement au plan des xz et dont la trace sur le plan des xy est MM' ; découpons ce volume infiniment petit en éléments par des plans parallèles au plan des zy le volume d'un élément est $(z_1 - z_2)\,dx\,dy$ en désignant par z_1 et z_2 les deux points où une parallèle à Oz perce la surface, le volume de la tranche est donc

$$(1) \qquad dy \int_{BM}^{BM'} (z_1 - z_2)\,dx$$

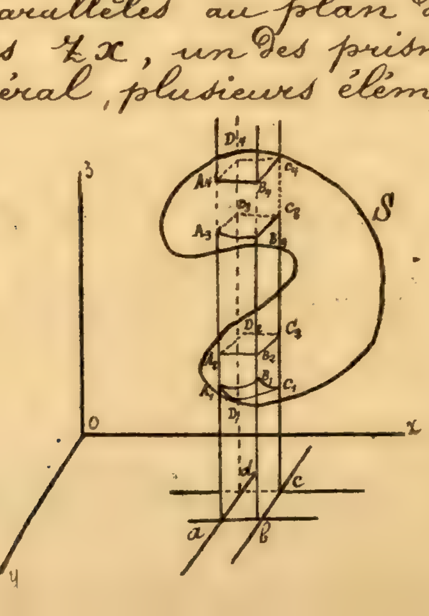
et les limites BM et BM' sont des fonctions de y.

On aura le volume total en faisant la somme de tranches semblables.

ce volume sera donc :
$$\int_a^b dy \int_{BM}^{BM'} (z_1 - z_2)\,dx$$

Il y a des difficultés si la parallèle à Oz rencontre la surface en plus de deux points.

Considérons une surface fermée S de forme quelconque ; si on divise le volume qu'elle comprend en éléments infiniment petits par deux séries de plans infiniment voisins les uns parallèles au plan des zy, les autres parallèles au plan des zx, un des prismes ainsi formé découpe, dans le cas général, plusieurs éléments infiniment petits ; c'est ainsi que le prisme figuré ci-contre et ayant pour base $abcd$ découpe deux éléments dans le volume considéré ; si l'on désigne par z_1, z_2, z_3, z_4 les cotes des points A_1, A_2, A_3, A_4,



la somme de ces deux volumes élémentaires est $(z_4 - z_3 + z_2 - z_1)\,dx\,dy$;

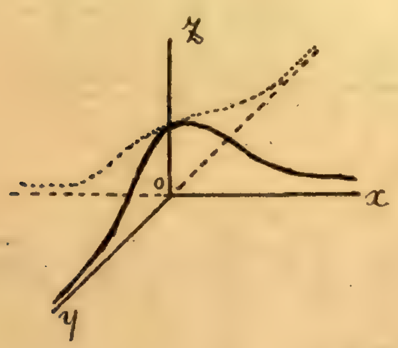
pour obtenir le volume total il faudra faire la somme de toutes les expressions analogues pour tous les couples de valeurs de x et de y correspondant à des points de la surface donnée.

Cette somme sera la somme d'expressions de la forme $\pm z\,dx\,dy$ pour tous les points de la surface pris avec le signe + si la parallèle à la direction de O vers z sort de la surface au point considéré et avec le signe − dans le cas contraire ; mais le produit $dx\,dy$ qui représente l'aire de la projection d'un élément de surface $d\sigma$ autour du point considéré est égal à l'aire de cet élément multipliée par le cosinus de l'angle de la normale avec l'axe des z ; le produit $z\,dx\,dy$ est donc égal en valeur absolue à $[z\,d\sigma\cos(N, Oz)]$, N étant la normale à la surface considérée ; il est d'ailleurs manifeste que ce produit aura le signe de $\pm z\,dx\,dy$ (défini par la convention précédente) si on convient de prendre sur la normale le sens d'un mobile la parcourant à partir du point considéré et sortant de la surface en ce point. Le volume cherché est donc la somme des valeurs de cette expression pour tous les points de la surface, l'élément $d\sigma$ contiendra deux variables par rapport auxquelles il faudra intégrer successivement.

On a donc $V = \iint z\,d\sigma\cos(N.Oz)$

Application. — Considérons la surface représentée par l'équation

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$



C'est une surface de révolution autour de l'axe des z, qui s'abaisse asymptotiquement au plan des xy et dont les sections par les plans des xz et des yz sont comme ci-contre.

En appliquant la formule précédente au volume projeté dans le quart de plan xOy, on a évidement pour le volume total l'expression

$$V = 4\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dy.$$

La 1ère intégrale à calculer est la suivante où x est

supposé constant
$$\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dy = e^{-x^2}\int_0^\infty e^{-y^2}dy \quad (1)$$

Or l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$ est une certaine constante que je désigne par K; l'intégrale (1) est alors égale à Ke^{-x^2} et par suite
$$V = 4\int_0^\infty Ke^{-x^2}dx = 4K\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

Mais l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ est précisément égale à K on a donc $V = 4K^2 = 4\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]^2$

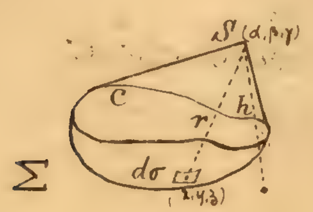
Nous ne savons pas calculer directement cette intégrale définie ; mais nous pouvons la déduire de l'évaluation du volume considéré faite d'une autre manière.

Si nous considérons la surface donnée comme une surface de révolution autour de l'axe des z son volume est représenté par l'intégrale
$$\int_0^1 \pi R^2 dz$$
R étant le rayon du parallèle determiné par un plan parallèle au plan des xy et à une distance z de celui-ci, R^2 est donc égal à x^2+y^2, et comme l'équation de la surface est
$$e^{-(x^2+y^2)} = z$$
on a $$x^2+y^2 = -Lz$$
et par suite
$$V = \int_0^1 -\pi Lz\,dz$$

Mais en intégrant par parties on a immédiatement
$$\int dz\,Lz = zLz - \int z\left(\frac{dz}{z}\right) = z(Lz-1)$$
Par suite
$$V = \pi$$
On a donc
$$4\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]^2 = \pi \quad \text{d'où} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Théorème : <u>On considère une portion de surface quelconque limitée par une courbe gauche, le lieu des</u>

sommets des cônes ayant cette courbe pour directrice et tels que le volume total ait une valeur donnée est un plan.



Soit Σ la surface donnée et C la courbe qui la limite.

$S(\alpha, \beta, \gamma)$ le sommet d'un cône répondant à la question.

Prenons un élément infiniment petit de la surface Σ le volume élémentaire correspondant à cet élément est

$$\frac{d\sigma . h}{3}$$

h étant la distance du point S au plan tangent à l'élément considéré. Or cette distance est égale au vecteur r qui joint le point S à l'élément multiplié par le cosinus de l'angle que ce vecteur fait avec la normale à l'élément

$$h = r \cos (r.N)$$

Donc $$\frac{d\sigma . h}{3} = \frac{d\sigma . r . \cos (r.N)}{3}$$

les cosinus directeurs du vecteur r sont

$$\frac{x-\alpha}{r}, \quad \frac{y-\beta}{r}, \quad \frac{z-\gamma}{z}$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément; les cosinus directeurs de la normale sont $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ dépendant simplement de x, y, z et de l'équation de la surface.

Donc : $$\cos (r.N) = \frac{x-\alpha}{r} \cos \lambda + \frac{y-\beta}{r} \cos \mu + \frac{z-\gamma}{r} \cos \nu$$

et le volume du cône est

$$V = \int \frac{d\sigma}{3} \left[(x-\alpha) \cos \lambda + (y-\beta) \cos \mu + (z-\gamma) \cos \nu \right]$$

Dans les opérations on considérera toujours α, β, γ comme des constantes et elles multiplieront les résultats de l'intégration de leurs coëfficients. Le résultat sera donc de la forme

$$V = A\alpha + B\beta + C\gamma + D.$$

A, B, C, D dépendant de la surface et de la courbe données

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Donc le lieu des sommets pour lesquels ce volume a une valeur constante est un plan.

Calcul de la masse d'un Solide hétérogène.

Considérons un solide pour lequel la densité varie en chaque point, cette densité ρ est alors fonction de x, y, z.

$$\rho = f(x, y, z)$$

On aura la masse élémentaire en multipliant le volume d'un élément par la densité d'un de ses points qui sera considérée comme sa densité uniforme.

Pour que cette approximation ne fasse négliger que des infiniment petits d'ordre supérieur il faut que l'élément ait des dimensions infiniment petites dans toutes les directions. Ce sera donc par exemple $dx.\,dy.\,dz$ et la masse de cet élément sera

$$f(x, y, z)\, dx.\, dy.\, dz$$

Pour avoir la masse totale, on commencera par chercher celle du prisme obtenu en ne faisant varier que z dans cette expression la masse d'un tel prisme sera

$$dx\, dy \int_{z_0}^{z_1} \rho\, dz$$

z_0 et z_1 dépendant de x et y

Puis on ajoutera les prismes identiques obtenus en ne faisant varier que dy. On aura aussi la masse d'une tranche

$$dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} \rho\, dz$$

y_0 et y_1 étant fonctions de x

Enfin la masse totale se composera de la masse de toutes les tranches identiques correspondant à toutes les valeurs utiles de x, ce sera donc

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} \rho\, dz$$

Remarque. Il est bien évident que tout ce que nous avons dit pour les coordonnées cartésiennes est applicable à un système quelconque de coordonnées. Il suffit de

chercher l'expression du volume élémentaire compris entre des surfaces d'égales coordonnées infiniment voisines. Le reste des raisonnements est identique.

Ainsi en coordonnées polaires le volume élémentaire est comme on le voit immédiatement ~~[illegible]~~

$$\rho^2 \sin\theta\, d\theta,\, d\psi.\, d\rho$$

le volume de la sphère de rayon R qui a pour centre l'origine est donc puisque $\rho = R$ est son équation :

$$\int_0^{\pi} d\psi \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{R} \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

35ème Leçon

Changements de variables

Nous savons déjà résoudre cette question dans le cas d'une seule variable, la solution est immédiate.

Si on a $\int \varphi(x)\,dx$, on exprime $\varphi(x)$ en fonction de u et on remplace

$$dx \text{ par } \frac{dx}{du}\,du$$

Prenons maintenant le cas d'une fonction de deux variables.

Soit $\iint V\,dx\,dy$, V étant fonction de x et y ; nous supposerons qu'on ait donné les limites [~~ici ayant l'intégrale générale, c'est à dire la fonction F, telle que $\frac{d^2F}{dx\,dy} = V$, il est impossible d'en déduire la valeur de l'intégrale définie à l'aide de simples substitutions, comme on le fait dans le cas d'une seule variable~~]

Nous voulons donc intégrer $\iint V\,dx\,dy$, en remplaçant x et y par deux nouvelles variables u et v dont les premières sont des fonctions connues : $x = \varphi(u,v)$; $y = \psi(u,v)$.

Prenons d'abord l'intégrale par rapport à x : $\int V\,dx$, nous devons ensuite la multiplier par dy et intégrer ; en effectuant $\int V\,dx$ nous supposons y constant, nous avons donc une relation entre v et u (c'est $\psi(u,v) = C^{te}$) et nous pouvons

donc considérer x comme fonction de u. Nous sommes alors ramenés au cas d'une seule variable.

Il vient alors $\displaystyle\int V\left(\frac{dx}{du}\right)du$; que nous aurons ensuite à multiplier par dy et à intégrer, mais en supposant maintenant u constant, puisque l'intégration par rapport à u est faite ; or u étant constant y n'est plus fonction que de v et nous pouvons remplacer dy par $\dfrac{dy}{dv}\,dv$

Nous avons donc $\displaystyle\int\frac{dy}{dv}\,dv\int V\left(\frac{dx}{du}\right)du$

que nous écrivons $\displaystyle\iint V\left(\frac{dx}{du}\right)\frac{dy}{dv}\,du\,dv$, mais il faut tenir compte de ce que dans $V\left(\dfrac{dx}{du}\right)$ nous avons supposé y constant et dans $\dfrac{dy}{dv}$ u constant.

Dans $\dfrac{dy}{dv}$, u étant constant, on a bien la dérivée partielle de y par rapport à v.

Calculons maintenant $\left(\dfrac{dx}{du}\right)$. Nous avons

$$\left(\frac{dx}{du}\right)du = \frac{dx}{du}\,du + \frac{dx}{dv}\,\frac{dv}{du}\,du$$

$\dfrac{dv}{du}$ étant défini par $0 = \dfrac{dy}{du} + \dfrac{dy}{dv}\,\dfrac{dv}{du}$,

on déduit de ceci : $\dfrac{dv}{du} = -\dfrac{\frac{dy}{du}}{\frac{dy}{dv}}$

Et alors $$\left(\frac{dx}{du}\right) = \frac{\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du}}{\frac{dy}{dv}}$$

L'intégrale devient alors : $\displaystyle\iint V\left(\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\,\frac{dy}{du}\right)du\,dv$

Si on passe de coordonnées cartésiennes à des coordonnées polaires, on a

$$\left|\begin{aligned} x &= \rho\,\cos\theta \\ y &= \rho\,\sin\theta \end{aligned}\right.$$

Le facteur à employer est $\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\omega}-\frac{dx}{d\omega}\frac{dy}{d\rho}$

ou $\text{Cos}\,\omega.\rho\,\text{Cos}\,\omega+\text{Sin}\,\omega\,\rho\,\text{Sin}\,\omega=\rho$

Comme vérification supposons qu'on revienne aux variables primitives.

Il vient : $\iint V\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)dx\,dy$

Il faut que le produit :

$$\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)$$ soit égal à 1

nous avons l'identité : $1=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dx}{dv}\frac{dv}{dx}$, obtenu en considerant x comme fonction de u et v, et u et v à leur tour comme fonction de x et y.

De même nous avons $0=\frac{dx}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dx}{dv}\frac{dv}{dy}$

En effectuant le produit nous aurons précisément la différence de ces deux expressions, ce qui nous donne bien 1.

Considérons deux fonctions u et v de x et y ; on donne à x et y deux séries d'accroissements infiniment petits : d_1x, d_1y et d_2x, d_2y desquels résultent d_1u ; d_1v et d_2u, d_2v

On appelle déterminant du système des fonctions u et v le rapport :

$$\frac{\begin{vmatrix} d_1u & d_1v \\ d_2u & d_2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1x & d_1y \\ d_2x & d_2y \end{vmatrix}}$$

Ce rapport est ~~constant et~~ indépendant des accroissements.

En effet remplaçons :

$$d_1u=\frac{du}{dx}d_1x+\frac{du}{dy}d_1y \qquad d_2u=\frac{du}{dx}d_2x+\frac{du}{dy}d_2y$$

$$d_1v=\frac{dv}{dx}d_1x+\frac{dv}{dy}d_1y \qquad d_2v=\frac{dv}{dx}d_2x+\frac{dv}{dy}d_2y$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} d_1u & d_1v \\ d_2u & d_2v \end{vmatrix}$ nous donne alors le produit de

Deux Déterminants

$$\begin{vmatrix} \dfrac{du}{dx} & \dfrac{du}{dy} \\ \dfrac{dv}{dx} & \dfrac{dv}{dy} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{vmatrix}$$

Et le rapport écrit plus haut a bien pour expression indépendante des accroissements :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{du}{dx} & \dfrac{du}{dy} \\ \dfrac{dv}{dx} & \dfrac{dv}{dy} \end{vmatrix}$$

qui est celui que nous avons trouvé dans le changement de variables.

Si maintenant nous considérons x et y comme fonctions de u et v, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{dv} \\ \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dy}{dv} \end{vmatrix} \text{ est égal au rapport } \frac{\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 u & d_1 v \\ d_2 u & d_2 v \end{vmatrix}},$$

c'est-à-dire qu'il est l'inverse du premier. Leur produit est donc bien 1, et nous vérifions ainsi une seconde fois ce résultat.

Intégrales triples.

Nous avons $\iiint V\, dx\, dy\, dz$, et nous avons des variables nouvelles u, v, w.

Prenons d'abord $\int V dx$ que nous effectuons en supposant y et z constants, alors on peut considérer x comme fonction de u seulement, v et w étant des fonctions de u définies par $y = C^{te}$, $z = C^{te}$.

Nous aurons donc $\int V \left(\dfrac{dx}{du}\right) du$, $\left(\dfrac{dx}{du}\right)$ étant non pas la dérivée partielle de x par rapport à u mais la dérivée de x par rapport à u quand v et w en sont fonctions de telle manière que y et z restent constants.

Il nous reste alors $\iint dy\, dz \int V \left(\dfrac{dx}{du}\right) du$.

Si nous ~~prenons~~ intégrons par rapport à y ~~$\int dy$~~, nous avons u et z constants. y est fonction de v, (w étant aussi fonction de v) et nous

remplaçons par $\left(\frac{dy}{dv}\right) dv$. Enfin il nous reste $\int dz$, u et v étant constants, z n'est plus fonction que de w et nous remplaçons dz par $\frac{dz}{dw} dw$, qui cette fois est bien la dérivée partielle de z par rapport à w

Il vient en somme : $\int \frac{dz}{dw} dw \int \left(\frac{dy}{dv}\right) dv \int V \left(\frac{dx}{du}\right) du$;

ou en changeant l'ordre des intégrations.

$$\iiint V \left(\frac{dx}{du}\right) \left(\frac{dy}{dv}\right) \frac{dz}{dw} \, du \, dv \, dw$$

Il nous faut calculer $\left(\frac{dx}{du}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$, quant à $\frac{dz}{dw}$ nous le savons, c'est bien la dérivée partielle de z, u et v restant constants.

on a : $\left(\frac{dx}{du}\right) = \frac{dx}{du} + \frac{dx}{dv}\frac{dv}{du} + \frac{dx}{dw}\frac{dw}{du}$

avec $0 = \frac{dy}{du} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{du}$

et $0 = \frac{dz}{du} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{du} + \frac{dz}{dw}\frac{dw}{du}$

Ce qui donne : $$\left(\frac{dx}{du}\right) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix} \times \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix}}$$

Pour $\left(\frac{dy}{dv}\right)$ nous aurons :

$$\left(\frac{dy}{dv}\right) = \frac{dy}{dv} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dv}$$

$$0 = \frac{dz}{dv} + \frac{dz}{dw}\frac{dw}{dv}$$

ce qui donne : $\left(\dfrac{dy}{dv}\right) = \dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dy}{dw} \\ \dfrac{dz}{dv} & \dfrac{dz}{dw} \end{vmatrix}}{\dfrac{dz}{dw}}$

En portant dans notre intégrale il vient : $\displaystyle\iiint V \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dx}{dw} \\ \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dy}{dw} \\ \dfrac{dz}{du} & \dfrac{dz}{dv} & \dfrac{dz}{dw} \end{vmatrix} du\, dv\, dw$

Nous avons ainsi à multiplier V par le module de la transformation.

Dans le cas de coordonnées polaires :

$$x = \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cs}\psi$$
$$y = \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi$$
$$z = \rho \operatorname{Cs}\theta$$

Le déterminant est : $\begin{vmatrix} \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cs}\psi & \rho \operatorname{Cs}\theta \operatorname{Cs}\psi & -\rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi \\ \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\psi & \rho \operatorname{Cs}\theta \operatorname{Sin}\psi & \rho \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cs}\psi \\ \operatorname{Cs}\theta & -\rho \operatorname{Sin}\theta & 0 \end{vmatrix}$

qui donne $\operatorname{Cs}\, \rho^2 \operatorname{Cs}\theta \operatorname{Sin}\theta + \rho \operatorname{Sin}\theta\, \rho \operatorname{Sin}^2\theta = \rho^2 \operatorname{Sin}\theta.$

ce qui donne $\displaystyle\iiint V \rho^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\psi.$

C'est de cette formule qu'on déduit l'élément de volume en coordonnées polaires.

Fin

ag

la 1re Don est de M. Humbert

RETURN **Astronomy/Mathematics/Statistics/Computer Science Library**
TO → 100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 [redacted]	2 1 MONTH	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

FORM NO. DD3, 1/83
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

GENERAL LIBRARY - U.C. BERKELEY
B000141482
QA300
B481
1895
MATH/STAT.